



北京大学

博士研究生学位论文

题目： 时空耦合非局部弹性理论的

一些基本问题研究

姓 名： 王林娟

学 号： 1201111477

院 系： 工学院

专 业： 固体力学

研究方向： 先进材料与结构力学

导师姓名： 王建祥 教 授

徐吉峰 研究员

二〇一八年六月

***Research on some basic problems
of spatiotemporal non-local
elasticity***

Dissertation Submitted to
Peking University

**In partial fulfillment of the requirements for the degree of
Doctor of Natural Science**

By
**Linjuan Wang, Doctor Candidate
(Solid Mechanics)**

Dissertation Supervisor: **Professor Jianxiang Wang**
Professor Jifeng Xu

Department of Mechanics and Engineering Science
College of Engineering
Peking University
June, 2018, Beijing

版权声明

任何收存和保管本论文各种版本的单位和个人，未经本论文作者同意，不得将本论文转借他人，亦不得随意复制、抄录、拍照或以任何方式传播。否则，引起有碍作者著作权之问题，将可能承担法律责任。



摘要

非局部弹性力学理论具有宽广的适用范围，其研究对固体力学的发展具有推动作用，对准确预测非均质材料的力学行为具有重要的应用价值。本博士学位论文^①探究了时空耦合非局部弹性理论的一些基本问题，具体完成的工作如下：

(1) 基于移动平均概念得到了描述非均质材料宏观力学性能的时空耦合非局部控制方程，在弹性理论的范畴内阐释了非均质材料力学响应中时间非局部性和空间非局部性的物理机制。继而表明，该方程可与现有的多种非局部理论的控制方程建立联系，为解决现有非局部理论中材料参数的物理机制不清楚、无法定量表征的问题提供了一种途径。然后，探讨了本文发展的非局部控制方程以及现有非局部理论的变换不变性，研究表明，Eringen 方程、Kunin 方程、近场动力学 (PD) 方程与本文发展的积分型的空耦合非局部近场动力学方程，均满足变换不变性。

(2) 从经典的局部热弹性理论出发，利用复合圆柱模型推得了时空耦合非局部热弹理论的控制方程，其中所有的材料参数都具有明确的物理意义，并且可以退化为文献中已有的只含有空间非局部效应的近场动力学形式的力学和传热方程。继而，提出了适用于不连续和超常规传热的近场动力学形式的非傅立叶热传导理论，该理论预测结果与相应的实验结果符合较好。最后，给出了近场动力学形式的广义热弹性理论基本框架，并证明了该理论的解的唯一性。

(3) 求解了仅含有空间非局部性的近场动力学理论的一些基本问题，包括在点源作用下一、二、三维空间中键型和态型近场动力学静态、动态格林函数基本解、扩散问题格林函数、初边值问题的一般解和基本解，分析了非局部理论中的材料参数、非局部关联函数对弹性波传播特性的影响，以及间断条件和不连续场的演化规律。

(4) 基于近场动力学理论框架，开展了动态界面传播和人工边界条件的研究。采用解析手段，分析了 kink (扭结) 的平衡构形、稳定动态解和动力学关系。构建了消除出射波反射的透射边界条件，实现了入射波和出射波不失真、不反射的双向边界条件，并将人工边界条件应用于计算含有损伤的材料和复合材料中弹性波的传播，以及由震源产生的弹性波的传播，证实了本文构建的边界条件的有效性。

关键词：时空耦合非局部弹性理论，非均质材料，广义热弹性，近场动力学，格林函数解

^① 本研究得到国家自然科学基金 (编号: 11521202 和 11231001) 资助。

Research on some basic problems of spatiotemporal non-local elasticity

Linjuan Wang (Solid Mechanics)

Supervised by Professor Jianxiang Wang and Professor Jifeng Xu

ABSTRACT

The theory of non-local elasticity has a wide range of applications. The research on the theory can promote the development of solid mechanics; it also has important practical implications in accurate predictions of overall properties of heterogeneous materials. This thesis aims at explorations of some basic issues in spatiotemporal non-local elasticity. The completed detailed work is as follows.

(1) Based on the concept of moving average, we obtain the spatiotemporal governing equations describing the macroscopic overall mechanical properties of heterogeneous materials. This framework illuminates the physical mechanisms for the spatial non-locality and temporal non-locality in the mechanical behavior of heterogeneous materials in the context of elasticity. Then, the connections between the developed theory and the existing theories are examined and established, which provides a way to solve the problem that the physical mechanisms behind the material parameters in the existing theories are elusive, and are difficult to characterize. Afterwards, we explore the invariance of the presented theory and other theories. It is shown that the Eringen equation, Kunin equation, peridynamic equation (PD), as well as the integral-type spatiotemporal peridynamic equations developed in this thesis satisfy the invariance.

(2) Starting from the classical local thermoelasticity of homogeneous materials, and making use of the composite cylinder model, we derive the spatiotemporal thermoelastic non-local governing equations of a composite material, in which all the material parameters have clear physical meanings. The equations can degenerate into the peridynamic expressions of mechanics and heat conduction in the literature. Then, we propose a peridynamic framework of non-Fourier and non-local heat conduction which is suitable for modeling extraordinary heat conduction that involves discontinuities. The theoretical prediction agrees well with the corresponding experimental results. Finally, we present the basic framework of the peridynamic generalized thermoelasticity and prove the uniqueness of its solution.

(3) We solve some basic problems of the spatial non-local peridynamic theory, including the static and dynamic Green functions of the bond-based and state-based peridynamic theories

in one-, two-, and three-dimensions under a point force, and the Green functions for diffusion, as well as general solutions and basic solutions of initial-value and boundary-value problems. The effects of the material parameters and the kernel functions in the peridynamic theory on the characteristics of the propagation of elastic waves are analyzed, and jump conditions and the evolutions of discontinuities are investigated.

(4) Within the framework of peridynamics, we study the propagation of dynamic surfaces, and artificial boundary conditions. We analyze the equilibrium configuration, stable dynamic solution and dynamic relation of a kink, using an analytical approach. We construct the artificial transmitting boundary conditions that remove the artificial reflections of elastic waves, and the boundary conditions that allow the incoming and outgoing waves to transmit without distortion. These boundary conditions are applied to the modeling of wave propagations in a damaged material, a composite, and a seismic signal. These examples verify the validity of the proposed artificial boundary conditions.

KEYWORDS: Spatiotemporal non-local elasticity, heterogeneous material, generalized thermoelasticity, peridynamics, Green's functions

目录

第一章 绪论	1
1.1 课题背景及研究意义	1
1.2 非局部弹性理论的研究进展	3
1.2.1 积分型非局部理论	3
1.2.2 微分型非局部理论	8
1.3 目前非局部弹性理论存在的问题	9
1.4 本文的主要工作	11
第二章 非均质材料的时空耦合非局部弹性理论	13
2.1 引言	13
2.2 时空耦合非局部性的起源	14
2.3 与现有非局部弹性理论的关系	17
2.3.1 与现有时空耦合非局部弹性理论的关系	18
2.3.2 与现有空间非局部弹性理论的关系	20
2.4 纤维增强复合材料模型	21
2.4.1 位移场分解	22
2.4.2 宏观性能的控制方程	23
2.4.3 与现有非局部理论的关系	24
2.5 色散关系	25
2.5.1 时空耦合非局部形式的色散关系	25
2.5.2 简化及近似形式的色散关系	29
2.6 动态算例	31
2.7 非局部理论的变换不变性	33
2.7.1 微分型非局部理论	34
2.7.2 积分型非局部理论	35
2.8 本章小结	38
第三章 非均质材料的时空耦合非局部热弹性理论	39
3.1 时空耦合非局部热弹性理论的起源	39
3.1.1 非均质材料的宏观热弹性能	39
3.1.2 算例分析	42

3.2	PD 非傅里叶热传导理论.....	45
3.2.1	态型 PD 非傅里叶热传导理论	45
3.2.2	键型 PD 非傅里叶热传导理论	48
3.3	PD 非傅里叶热传导理论的数值实现.....	49
3.3.1	离散化和时间步进	49
3.3.2	数值稳定性	50
3.3.3	算例验证.....	51
3.4	PD 广义热弹性理论及其解的唯一性.....	58
3.4.1	预备知识.....	58
3.4.2	PD 广义热弹性理论.....	62
3.4.3	唯一性定理	65
3.5	本章小结	67
第四章	近场动力学的格林函数解	68
4.1	引言	68
4.2	态型 PD 的动态特性.....	69
4.2.1	动态基本特性.....	70
4.2.2	无界域初值问题的格林函数法	76
4.2.3	间断条件及不连续场的演化	78
4.2.4	算例	81
4.3	PD 热扩散的格林函数解.....	86
4.3.1	PD 热扩散模型的一般解.....	86
4.3.2	无界域格林函数	89
4.3.3	算例	92
4.4	本章小结	93
第五章	基于近场动力学的动态界面问题研究	95
5.1	引言	95
5.2	一维 kink 传播.....	96
5.2.1	问题描述及预备知识.....	96
5.2.2	经典线弹性模型	99
5.2.3	一维 kink 的 PD 模型	100
5.2.4	PD 模型和其他连续介质模型的等价性	109
5.3	一维人工透射边界条件.....	113
5.3.1	色散关系.....	114

5.3.2 透射边界条件.....	116
5.3.3 PTBCs 的有效性.....	119
5.3.4 一维非线性 PD 的透射边界条件.....	124
5.3.5 PD 的双向界面条件.....	126
5.3.6 应用.....	128
5.4 本章小结.....	133
第六章 论文工作总结.....	135
参考文献.....	137
博士期间发表和完成的论文.....	147
个人简历.....	149
致谢.....	151
北京大学学位论文原创性声明和使用授权说明.....	153

第一章 绪论

1.1 课题背景及研究意义

在经典连续介质力学理论中,物质的本构关系建立在局部作用原理的基础上。局部作用原理认为,某时刻某物质点的应力“仅依赖于该物质点附近无限小邻域内物质点的运动历史,而与远距离物质点的运动历史无关”^[1]。从局部作用原理出发,忽略变形梯度的导数及其高阶项之后,引出了简单物质的定义,即简单物质的本构关系仅依赖于变形梯度历史,而与变形的高阶导数无关。继而,如果当前时刻的应力仅是当前时刻变形梯度的函数,不依赖于变形历史,则称之为弹性应力^[1]。相应地,经典连续介质力学及在其基础上发展的相关理论被称为“局部理论”,其涉及的局部作用原理、简单物质和微分型本构关系并称为“局部化假设”。较之于经典连续介质力学的本构理论,可以将放弃了局部作用原理限制的本构关系理论统称为非局部理论。具体而言,本构关系中含有的对远距离物质点的依赖性称为“空间非局部”性,对物质点变形历史的依赖性称为“时间非局部”性。因此,“时空耦合非局部理论”是指本构关系中同时具有两种依赖性的连续介质力学理论。这种做法实际上是将本构关系回归到决定性原理^[1]的描述,认为某时刻某物质点的应力依赖于物体中全部物质点的变形历史。“时空耦合非局部理论”又被称为“记忆相关非局部 (memory-dependent nonlocal) 理论^[2]”。从广义上讲,空间非局部理论和时间非局部理论可看作是时空耦合非局部理论的特例。需要注意的是,目前已发展的很多非局部理论^[3-10]仅考虑了空间非局部性,认为某时刻某物质点的应力依赖于该物质点有限邻域内物质点(或物体中全部物质点)的变形梯度,而与变形历史无关。需要说明的是,具有黏性的物质的本构关系依赖于变形历史,但是,本文不讨论黏性造成的时间依赖性,而仅仅讨论和研究弹性物质以及由弹性物质构成的非均质材料的力学特性。

描述物质行为的任何数学模型都具有一定的适用范围,连续介质力学的局部理论和非局部理论也不例外。非局部理论中对远距离物质点和变形历史的依赖性,意味着在本构关系中引入了一个长度参数和一个时间参数,分别称之为“特征长度”和“特征时间”。二者与介质的微结构(微结构几何形貌、尺寸、各组分的材料性能、体积分数等)相关^[11]。因此,非局部理论应该自然地考虑了微结构对介质宏观性能的影响,适用于具有微结构的非均质材料的跨尺度问题。经典连续介质力学和非局部连续介质力学作为研究材料力学性能的自然科学,与材料的发展相辅相成,各自的适用范围决定了二者承载者不同的历史使命。从工业革命开始直到二十世纪早期,经典连续介质力学以其简洁的微分形式在预测材料性能方面取得了巨大的成功,广泛应用于航空航

天、船舶、机械制造、土木水利等工程领域。而近几十年来，随着材料技术的不断进步，新型材料不断涌现。经典连续介质力学理论在描述具有复杂微结构的材料的力学行为时，面临新的挑战。因此连续介质力学理论需要适应新材料的发展，非局部连续介质力学理论迎来了前所未有的机遇。

首先，在材料本身性质方面，具有微结构的非均质材料已成为目前新型结构材料的主要发展趋势。特别是，由两种或两种以上材料组成的复合材料以其高比强度、比刚度、抗疲劳、耐腐蚀、耐高温、隔音、减震等特点，已被广泛运用到国防工业、航空航天、汽车、建筑、医学等国民经济相关领域。当材料的内部微结构尺寸和材料整体结构的几何尺寸可比拟时，微结构对材料整体性能的影响不可忽略。尤其是，工业界关心和应用的复合材料宏观等效性能是基于有限尺寸的所谓代表体元 (RVE) 预测的，自然就包含着非局部效应。胡更开等也指出：“复合材料的宏观响应本质上具有非局部 (nonlocal) 的特性”^[12]。然而，经典的细观力学理论给出的复合材料等效性能的结果却依然是局部理论的形式，不含非局部效应所具有的特征尺寸。经验表明，局部理论形式的等效性能在大多数情况下是合适的近似，但是，对于高频振动、高应力（应变）梯度的问题，情况就不一样了^[13]。一个典型的例子就是含孔复合材料层合板的孔边应力集中以及强度预测问题，Silling^[14]将局部和非局部模型的预测值与实验值进行了对比，发现局部模型预测的应力集中系数远远高于实验值，而空间非局部模型的预测与实验符合较好；再如，在复合材料动态性能方面，非局部理论能够解释局部理论无法解释的高频弹性波色散现象^[2]。

其次，材料的本构关系不仅是关于材料本身性质的描述，而且与其外部环境和外部作用过程紧密相关^[1]。当外部载荷随空间或时间急剧变化时，将会产生较高的变形梯度（高应变梯度）和变化率（高应变率），此种情况下局部化假设亦会失效^[15]。而随着先进复合材料在飞机、火箭及航空发动机叶片中用量占比的不断提高，局部理论中存在的这一问题显得更加突出，发展非局部理论日益重要。

再次，经典线弹性波动方程在线性变换下形式不变^[16]，但在一般的坐标变换下不满足形式不变性，无法很好地应对功能材料设计的需要。功能材料的设计已成为当今科学技术领域的研究热点，尤其是，近年来伴随着增材制造技术迅猛发展起来的“超材料”受到极大的关注^[17]。超材料是一种非均匀的人工材料，通过微结构的设计调控波传播，进而实现如隐身、人造黑洞、负折射率等一系列新奇的功能。近年来电磁波超材料和声波超材料的研究取得了一系列具有诱人前景的成果，这很大程度上得益于其波动方程（电磁波/声波）满足坐标变换不变性。为此，人们希冀于在弹性波超材料的研究中也取得类似的成功，然而研究表明经典的线弹性波动方程在频域^[18]和时域^[19]均不满足这种变换形式不变性。可喜的是，与此同时研究者^[18]发现线弹性波动方程变换后得到的方程具有一般坐标变换下形式不变性。该方程与早期 Willis 等^[20,21]提出

的 Willis 方程均含有速度耦合项。为了便于区分，我们将线性弹性波动方程变换后得到的方程称为“微分型 Willis 方程”。将早期 Willis 等^[20,21]提出的 Willis 方程称为“原 Willis 方程”。原 Willis 方程的本构关系由微分型和积分型两部分组成。Milton 等^[18]进一步将原 Willis 方程的本构关系表达成仅有积分形式的形式，我们将该方程称为“积分型 Willis 方程”。Milton 等^[18]证明了积分型 Willis 方程同样具有形式不变性。Willis 方程是由 Willis 等人于二十世纪八十年代初提出的一种时空耦合非局部理论的控制方程，具有严谨的数学推导，但形式上较为抽象，长期以来并未引起足够的重视，而随着弹性波超材料的兴起，上述这一发现掀起了 Willis 方程研究的热潮。另外，向志海^[22]指出：“根据相对性原理^[23]（物理定律在一切参考系中都具有相同的形式），形式不变性是正确波动方程的固有属性。”

综上所述，随着新型材料的发展及其在重大工程项目中的广泛应用，经典连续介质力学的局限性愈发突出。庆幸的是，经过无数科研工作者的不懈努力，经典连续介质力学在不断完善中继续发挥着重要作用。尽管如此，面临材料发展的趋势和及其对理论更高的要求，放弃局部化假设，发展非局部理论不失为一条发展途径。非局部理论的适用范围与材料的发展相契合，在基础理论方面还有很大的发展空间，其革新任务还没有彻底完成。为此，本文从最基本的弹性理论出发，尝试研究非局部弹性理论的若干基本问题。下面将阐述非局部弹性理论的研究进展。

1.2 非局部弹性理论的研究进展

非局部连续介质力学的思想可追溯到十九世纪末。早在 1893 年，Duhem^[11,24]就指出一点处的应力原则上应依赖于整个物体的状态^[11]。直到二十世纪六十年代末，非局部理论才正式提出并系统地建立起来。近半个世纪以来，科研工作们结合不同的实际问题，相继建立了各式各样的非局部理论^[25]。按照控制方程形式的不同，非局部理论可分为两大类^[11,26]：积分型非局部理论和微分型非局部理论。分别简述如下。

1.2.1 积分型非局部理论

非局部理论中，本构关系对远距离物质点和变形历史的依赖性可通过多种数学形式体现，其中加权平均是最常用的一种。具有加权平均形式的非局部理论被称为“积分型非局部理论”，或“强非局部理论”。积分型非局部理论的工作开始于二十世纪六十年代末，Krumhansl、Kröner、Kunin 等^[3,27-29]基于离散模型连续化的思想，先后提出了原子晶格理论的连续化模型，探讨了弹性材料的长程凝聚力、微结构和位错理论，得到了同时包含微分型和积分型本构的本构方程。这些早期的工作虽然较为直观，缺乏系统性和热力学上的考虑^[30,31]，但具有一定的先驱性，为发展系统的非局部理论框架打下了基础，这一点在研究者们后续的工作中得到了体现。本文按照本构关系是否

含有空间微分项，将积分型非局部理论进一步细分为应变积分型和位移积分型。

1.2.1.1 应变积分型非局部理论

应变积分型非局部理论保留了空间微分项，通过加权平均的形式将某点的应力（应变）与远距离点的应力（应变）及应力（应变）历史联系起来，主要包括 Eringen 理论和 Willis 理论。

(1) Eringen 理论

Edelen 等^[32,33]和 Eringen 等^[4,34]首次在守恒定律和热力学框架下，通过引入权函数的方式，系统地建立了积分型空间非局部理论。他们用该理论研究了高频波色散问题，预测的色散曲线与实验值及晶体点阵理论的计算值相符合。1974 年，Eringen 和 Kim^[35]计算了 I 型线弹性裂纹在一维情况下的裂尖应力场，计算结果表明裂尖的应力为有限值，奇异性被消除。1977 年，Eringen 等^[36]在二维情况下得到了同样的结论，并进一步简化了该理论，保留了经典连续介质力学的平衡方程和几何方程的形式，将本构关系表示为

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathcal{B}} \phi(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \mathbf{C}(\mathbf{x}') : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}', t) dV_{\mathbf{x}'}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{B} \quad (1.1)$$

其中， \mathcal{B} 为参考构型； $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ 为时刻 t 点 \mathbf{x} 处的应力； $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}', t)$ 为时刻 t 点 \mathbf{x}' 处的应变； $\mathbf{C}(\mathbf{x}')$ 为点 \mathbf{x}' 处四阶弹性张量； $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|$ 为两点间的距离； $\phi(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$ 为标量核函数（如 Gauss 函数），它与特征长度相关，定量地反映了点 \mathbf{x}' 的应力对点 \mathbf{x} 的应力的影响。当特征长度趋于零时，权函数退化为 Dirac 函数。此时非局部理论退化为经典连续介质力学理论。在本构关系 (1.1) 基础上，Eringen 等^[2]先后发展了非局部线弹性理论、非局部流体力学、非局部电磁理论、记忆相关非局部热力耦合理论、记忆相关非局部流体力学等。特别指出的是，Eringen^[2]建立的记忆相关非局部理论仅在应力应变关系中考虑了时空耦合非局部性，在惯性项中并未考虑时空耦合非局部性，与下文将要提及的 Willis 方程有着本质上的不同。另外在变分原理方面，Polizzotto^[37,38]给出了均质和非均质材料的非局部变分原理，包括总势能、余能和混合的胡海昌-鹭津变分原理。

除了在理论方面的进展，Eringen 积分型非局部理论也因其本构关系 (1.1) 的简洁形式被广泛应用到多个领域，其中最为研究者们普遍接受、且广泛应用的领域之一就是纳米结构。最近 Wang 等^[39]和 Rafii-Tabar 等^[40]综述了 Eringen 非局理论在纳米结构（如碳纳米管、石墨烯、纳米梁结构、周期性结构、及功能梯度结构等）的应用中取得的一系列科研成果。此后，杨昌玉^[41]基于非局部理论和哈密顿力学辛方法提出了一种求解纳米结构自由振动和模态的解析法。刘辰等^[42,43]基于 Eringen 的非局部理论建立了非局部压电纳米板模型，研究了其线性和非线性振动、屈曲和后屈曲等特性。另外，Eringen 非局部理论在损伤和塑性变形方面也得到了一系列令人瞩目的研究成果，以 Bazant 为代表的研究者们^[11]发展了一系列非局部塑形模型和非局部损伤模型，成

功地模拟了分布损伤的演化机制，如微裂纹扩展、孔洞的生成、应变软化等。以上应用仍以空间非局部理论为主，鲜有涉及 Eringen 等提出的记忆相关非局部理论。

(2) Willis 理论

从二十世纪八十年代初期以来，Willis 等^[20,21,44,45] 针对弹性复合材料，考虑了材料密度、模量等非均质性的影响，通过在均匀比较材料上叠加扰动的方法，得到了一组新的方程

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_{eff} &= \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{eff} + \mathbf{b} \\ \boldsymbol{\sigma}_{eff} &= \mathbf{C}_{eff} \circ \boldsymbol{\epsilon}_H + \mathbf{S}_{eff} \circ \dot{\mathbf{u}}_H + \mathbf{C}_0 : \boldsymbol{\epsilon}_H \\ \mathbf{p}_{eff} &= \mathbf{D}_{eff} \circ \boldsymbol{\epsilon}_H + \boldsymbol{\rho}_{eff} \circ \dot{\mathbf{u}}_H + \boldsymbol{\rho}_0 \dot{\mathbf{u}}_H\end{aligned}\quad (1.2)$$

其中，符号 \circ 表示时间卷积； \mathbf{b} 为体力； \mathbf{u}_H 和 $\boldsymbol{\epsilon}_H$ 为复合材料等效位移场和应变场； $\boldsymbol{\sigma}_{eff}$ 和 \mathbf{p}_{eff} 分别表示等效应力和等效动量； \mathbf{C}_0 和 $\boldsymbol{\rho}_0$ 分别为比较材料的刚度矩阵和密度。 \mathbf{C}_{eff} 、 \mathbf{S}_{eff} 、 \mathbf{D}_{eff} 和 $\boldsymbol{\rho}_{eff}$ 为空间非局部算子^[20,21,45]，其中在不考虑孔洞夹杂这一特殊情况时 \mathbf{S}_{eff} 和 \mathbf{D}_{eff} 互为伴随算子。由方程 (1.2) 可知，Willis 理论是一种时空耦合非局部理论，且同时考虑了惯性项和非惯性项的时空耦合非局部性，与仅考虑后者的 Eringen 记忆相关非局部理论不同。与经典方程相比，Willis 方程包含额外的速度耦合项，但该项的物理意义不明确。Nassar 等^[46] 指出空间非局部算子 \mathbf{C}_{eff} 、 \mathbf{S}_{eff} 、 \mathbf{D}_{eff} 和 $\boldsymbol{\rho}_{eff}$ 并不唯一，且很难表达成与各组分性能相关的显式表达式。也就是说，Willis 方程的形式较为抽象，导致其在早期并未引起研究者的重视。直到 2006 年，Milton 等^[18] 指出速度耦合项的存在确保了微分型 Willis 方程和积分型 Willis 方程满足经典方程不满足的变换不变性。这一发现对 Willis 方程的发展具有里程碑式的意义，至此，人们对 Willis 方程给予了强烈的关注，并正式称之为“Willis 方程”，相继开展了很多富有创新性的研究^[46-50]。

1.2.1.2 位移积分型非局部理论

(1) Kunin 理论

位移积分型非局部理论同样起源于二十世纪八十年代，Kunin^[51,52] 在其前期工作^[28,29] 的基础上，基于晶格离散模型连续化的思想，先后建立了具有微结构的弹性体的一维和三维空间非局部弹性理论，其控制方程可表示为

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}', t) dV_{\mathbf{x}'} + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{B} \quad (1.3)$$

其中， ρ 为密度； $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ 为力常数 (force constants) 二阶张量且 $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ 。控制方程 (1.3) 不含有空间微分项，可直接用于处理不连续问题，这也是位移积分型非局部理论较之于应变积分型非局部理论的主要优势之一。同样，由于没有空间微分项，该空间非局部理论不涉及应变、应力的概念，因此并未引起习惯了应力应变概念的力

学界的关注。之后 Kunin 专注于缺陷材料规范场论的研究^[15]，位移积分型非局部理论基本处于停滞状态。

(2) Peridynamics (近场动力学) 理论

2000 年，美国 Sandia 国家实验室的 Silling^[6] 在不引入应力、应变的情况下，提出了考虑长程作用力的空间非局部连续介质模型，并将其命名为“peridynamics”或“peridynamic theory”，下文将其简称为“PD”。黄丹等^[53] 在关于 peridynamics 的综述中首次将其译为“近场动力学”。其基本思想是：在某一时刻 t ，物体 $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^3$ 内的任一物质点 $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ 与其邻域内 \mathcal{H}_ℓ 的任意物质点 \mathbf{x}' 存在相互作用 $\mathbf{f}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}', t), \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))$ ，则由牛顿第二定律可得控制方程为

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathcal{H}_\ell} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}(\mathbf{x}', t)) dV_{\mathbf{x}'} + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{B} \quad (1.4)$$

其中， $\mathcal{H}_\ell := \{\mathbf{x}' \in \mathcal{B} : 0 < |\mathbf{x}' - \mathbf{x}| \leq \ell\}$ ， ℓ 为非局部长度且 $\ell > 0$ 。当 ℓ 趋近于零时，方程 (1.4) 将退化为经典连续介质力学的控制方程。相互作用 \mathbf{f} 包含了材料的本构信息且不含有空间微分项，被称为“对力 (pairwise force) 函数”或“本构力函数”，具有力/体积² 的量纲。根据相互作用 \mathbf{f} 定义方式不同，近场动力学可分为键型 (bond-based) 和态型 (state-based) 两类。

在键型近场动力学^[6] 中，Silling 假设两物质点可看作以“键”的形式相连，两点间的相互作用仅依赖于两点的状态，而与其它点无关，此时相互作用 \mathbf{f} 可表示为 $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))$ 。例如，较为常用的本构力函数可表示为

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}|} \mu(\boldsymbol{\xi}, t) \frac{9K}{\pi \ell^4} e^{-\frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{\ell^2}} (s - \alpha \theta) \quad (1.5)$$

其中， $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$ ； $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ； K 为体积模量； α 为热膨胀系数； θ 为物质点对的平均温度； s 为“键”的相对伸长率

$$s = \frac{|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}| - |\boldsymbol{\eta}|}{|\boldsymbol{\xi}|} \quad (1.6)$$

当相对伸长率达到临界值 s_0 时，“键”发生永久性的断裂，不再承受拉伸载荷但具有一定的承压能力，这与材料破坏的直观行为相符，该行为可通过标量判断函数 $\mu(\boldsymbol{\xi}, t)$ 描述为

$$\mu(\boldsymbol{\xi}, t) = \begin{cases} 1, & s - \alpha \theta < s_0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.7)$$

因此，本构力函数 (1.5) 提供了一种模拟材料失效、破坏的自然途径，可直接用于不连续问题。除了本构力函数 (1.5) 外，Silling、Weckner 和 Abeyaratne 等^[6, 54-57] 在对点力函数的构建、近场动力学中材料的各向同性、弹性、线性化以及近场动力学理论与传统固体力学理论之间的联系等方面做了详细的讨论和证明。线性化的本构力函数^[6] 可

进一步表示为

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\eta} \quad (1.8)$$

把本构力函数 (1.7) 代入到方程 (1.4) 可得到与 Kunin 理论的控制方程 (1.3) 类似的形式, 因此 Silling 将 Kunin 理论看作是近场动力学的前身和特例。

键型近场动力学因其简单易于理解的形式, 及其处理不连续力学问题的独特优势, 很快地应用到了宏/细/微观静、动力破坏分析中。研究表明^[54,58], 键型近场动力学在进行裂纹扩展模拟时, 无需预设裂纹扩展路径及额外的扩展准则, 且裂纹尖端不存在奇异性。但与此同时, 键型近场动力学在理论上仍存在一定的局限性^[7], 主要体现在以下两个方面:

最突出的一点就是其本构力函数的局限性。键型近场动力学描述的物质点间的相互作用类似于分子动力学模拟中的中心对势, 忽略了物质点对之间的相互影响及环境的影响, 这种过于简化的本构模型极大地限制了键型近场动力学的应用范围。例如在均匀各向同性线弹性材料的本构建模中发现, 键型近场动力学的泊松比为定值^[6]。三维情况下泊松比为 $\nu = 1/4$, 二维平面应力和平面应变情况下, 泊松比分别为 $\nu = 1/3$ 和 $\nu = 1/4$ 。因此很多传统的弹性材料无法准确地建立相应的键型近场动力学本构模型。

另一方面, 键型近场动力学缺乏和传统的理论的联系, 限制了其推广及应用。例如经典理论中的应力、应变、弹性常数以及其它物性参数在近场动力学模型中没有明确的描述。大量的材料本构关系和实验研究都是基于经典连续介质力学的应力-应变关系开展的, 而近场动力学抛弃了应力-应变关系, 缺少了与已有本构理论和实验数据建立联系的方式, 为此, Lehoucq 和 Silling^[59] 将经典连续力学中的常用力学量 (如应力、应力向量等) 引入到近场动力学中, 并结合实例对已知传统应力-应变关系的材料如何用近场动力学模型等价描述进行了推导、分析和验证。但一些传统的材料特性如金属的塑性、粘性等, 目前键型近场动力学仍无法准确反映。

为了克服键型近场动力学的这些缺点, 2007 年到 2010 年期间, Silling 等^[7,8] 提出了态型近场动力学, 假设点对之间的相互作用与两点各自邻域内的物质点的状态均相关。并建立了一套通过经典连续介质力学本构关系确定本构力函数 \mathbf{f} 的方法, 还进一步提出了与传统理论相似的以二阶应力-应变张量形式描述的态型近场动力学本构关系。研究表明, 态型近场动力学不但继承了键型近场动力学的优点, 比如可以自然描述不连续现象 (如损伤演化、裂纹扩展等), 而且突破了键型近场动力学在本构关系方面的局限性, 例如泊松比不再为固定值。Warren^[60] 和 Silling^[61] 等建立了线弹性、弹塑性固体以及线性流体的近场动力学状态模型, 推导了传统本构参数与近场动力学模型本构参数的联系, 并对态型近场动力学的本构力函数进行了线性化和数学论证。态型近场动力学大幅提高了键型近场动力学的计算精度以及本构建模的普适性。至此, 经过

十余年的发展，研究者们基本完成了近场动力学理论基础框架的构建^[62]。

另外值得注意的是，关于近场动力学的空间积分型方程的研究在数学上已有较丰富的研究成果。借鉴已有的数学成果对近场动力学的基础理论发展具有重大意义，同时也是未来一个比较有价值的研究方向。不少应用数学方面的研究者在近场动力学理论的适用性方面已取得了初步的研究。例如，Emmrich 和 Weckner^[63-65]、Du 和 Zhou^[66] 分别证明了近场动力学线性化线弹性模型柯西问题的适用性。Erbay^[67] 等证明了近场动力学一维非线性弹性模型柯西问题的适用性。

与此同时，在数值方法方面，近场动力学基于点对相互作用建立积分方程的思想与分子动力学（MD）极其类似。它们具有相似的离散计算结构。基于此特点，Parks 等^[68] 在 MD 软件 LAMMPS 中增加了功能扩展模块 PDLAMMPS，成功地在通用软件上实现了近场动力学的数值计算。Sandia 实验室开发了近场动力学的专用计算软件 EMU。研究者们先后发展了基于近场动力学理论的无网格法、有限单元法及耦合算法等数值方法。经过不断的应用和完善，逐步形成了较为完整的近场动力学数值离散和计算体系^[57,69-71]。

理论、数学、数值方面齐头并进的发展，极大的促进和保障了近场动力学理论在众多领域的应用。例如在纤维增强复合材料方面，Xu 和 Askari 等^[72,73] 利用 EMU 程序分析了二维和三维纤维增强复合材料层合板在双向拉伸载荷及冲击载荷下的损伤破坏过程，结果与实验符合较好。Kilic 等^[58,69] 通过基体和纤维分开建模的方式考虑了纤维断裂、基体破坏和层间开裂等多种破坏模式。Hu 等^[74,75] 数值模拟了多种动态载荷对复合材料损伤和断裂的影响。胡祎乐^[76] 提出了一种均匀化的纤维增强复合材料模型，用其分析了含大缺口复合材料板和含中心圆孔复合材料板的弹性、损伤和破坏模式，并和实验结果进行了定性比较。在晶体研究方面，Askari 等^[77] 模拟了宏观多晶硅的破坏过程，同时预测了晶界裂纹和穿晶断裂，解释了宏观破坏过程中的微观机制；Sun 和 Sundararaghavan^[78] 基于态型近场动力学模拟了多晶的塑性变形，研究表明，近场动力学模型较之于常用的晶体塑性有限元方法，在相同的离散尺寸下，呈现出更精细的剪切带，且计算效率优于后者。在细微观不连续问题方面，Dayal 和 Bhattacharya^[79] 将键型近场动力学应用于相变动力学，发现近场动力学模型自带动力学关系，相边界可以自然地形成和传播，并从失稳角度解释了其他数值方法（如相场模型）无法模拟的多相产生的机制；Silling、Bobaru 和 Lehoucq^[80-82] 对纳米纤维网、碳纳米管、纳米复合材料的变形破坏和纳米柔性纤维自组织变形进行了数值模拟和分析。

1.2.2 微分型非局部理论

微分型非局部理论是一种广义上的非局部理论。广义上，可以将任何涉及特征尺度的本构模型统称为非局部模型。为此，Bazant 将微极理论（每个物质点额外考虑三

个转动自由度)也归为非局部理论,但微极理论不在本论文的讨论范畴。本文的微分型非局部理论仅仅指非极性的连续介质理论,其发展早于积分型非局部理论。

1964年, Mindlin^[83] 将具有微结构的材料抽象为在每个物质点附加一个体积微元的物理模型,在定义了变形能密度和动能密度的基础上,通过变分原理得到了一组适用于含微结构弹性体的非局部控制方程。该方程组通过消元法可表达为一个同时含有时间、空间和时-空耦合高阶导数项的位移控制方程,因此 Mindlin 理论是一种“弱时空耦合非局部理论”。另外该方程中含有较多的独立材料参数(例如各向同性弹性材料对应的方程有 18 个独立的材料参数^[9]),不便于实际工程应用。二十世纪九十年代, Aifantis^[84,85] 提出了形式较为简化的应变梯度理论,其本构关系为

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) : (\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t) - \ell^2 \nabla^2 \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t)), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{B} \quad (1.9)$$

其平衡方程和几何方程仍与经典方程一致。此外,由 Eringen 的本构方程 (1.1) 泰勒展开可得到应力梯度理论^[9],其本构关系为

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) - \ell^2 \nabla^2 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{B} \quad (1.10)$$

部分学者将晶格结构的离散控制方程连续化,通过泰勒展开的方法得到了一系列含有应变高阶空间微分项的本构方程,统称为“高阶理论”^[9]。通过泰勒展开的方法,同样可以建立近场动力学和微分型非局部理论之间的关系^[86]。在这个意义上,微分型非局部理论可由积分型非局部理论通过泰勒展开得到。因此,微分型非局部理论又被称作“弱非局部理论”。

2011年, Askes 和 Aifantis^[9] 系统全面地综述了各种各样的微分型非局部理论的理论框架、数值实现、及在静/动态问题中的应用。本文不再赘述。但需要强调的一点是,微分型非局部理论与经典连续介质力学理论相比,引入了特长尺度的同时增加了空间和时间微分高阶项,导致其虽然能考虑介质中微结构的影响,但对物理量的光滑性要求更高,不便于直接处理不连续问题。此外,高阶项的存在要求给出更高阶的边界条件以满足方程的适定性,而应力、应变梯度理论和高阶梯度理论边界条件的研究一直是相关领域研究的难点之一。

1.3 目前非局部弹性理论存在的问题

综上所述,尽管研究者结合实际应用已经发展了多种非局部理论模型,但是归根溯源,它们都是在以上四种非局部理论(Eringen 理论、Willis 理论、近场动力学、高阶理论)的基础上演化而来的。为了在理论上严密且便于应用,我们认为,理想的非局部理论应该具有三个特点:考虑材料微结构的影响、满足变换不变性、直接处理不连续问题。有趣的是,四种非局部理论(Eringen 理论、Willis 理论、近场动力学、高

阶理论)在实际应用中分别凸显了其中的一条。Eringen 理论和高阶理论引入了特征长度,目前在纳米材料等尺寸效应明显的领域中应用较为广泛;Willis 理论满足变换不变性,在超材料设计中受到了极大的青睐;而近场动力学则因处理不连续问题的独特优势,迅速应用到了众多涉及几何或材料不连续的领域中。因此,现有非局部弹性理论具有各自的优势,也具有各自的局限性。这恰恰揭示了非局弹性部理论的发展空间。为此,我们将现有非局部弹性理论中普遍存在或突出存在的问题总结如下,在此基础上构建本文的主要研究框架。

(1) 现有的非局部弹性理论均不能同时满足三点要求

首先,为了考虑微结构的影响,理想的非局部弹性理论应同时具有明确的特征长度和特征时间两种特征尺度,便于定量、准确描述非均质材料的动态响应。因此,理想的非局部弹性理论在弹性动力学框架下应该具有时空耦合特征,在弹性静力学条件下退化为空间非局部弹性理论。而目前只有 Willis 理论和 Mindlin 理论满足这一要求。而前文提到的 Eringen 记忆相关非局部理论仅仅在非惯性项中考虑了时空非局部性,Eringen 理论、Kunin 理论、PD 均为空间非局部理论。其次,根据相对性原理及新型材料动态设计的需求,理想的非局部弹性理论的波动方程应满足变换不变性,目前只报道了微分型和积分型 Willis 方程满足变换不变性^[18,19]。我们不禁要问,只有 Willis 方程才满足变换不变性吗?Eringen 理论、近场动力学理论及微分型理论是否满足变换不变性?这些问题,本文将在后续篇幅中给予回答。最后,为了能直接处理不连续问题,理想非局部理论应不含有空间微分项。显然只有位移积分型非局部理论(Kunin 理论和近场动力学)才满足这一要求。总之,现有的非局部弹性理论中的单个理论仅满足其中的一点到两点要求,不能同时满足三点要求。

(2) 现有非局部弹性理论的物理机制不清楚,或定量表征存在问题

除了 Mindlin 理论和 Willis 理论外,现有的非局部弹性理论大都是基于直观假设提出的,导致其特征尺度、核函数形式等无法与材料的微结构属性建立定量的联系。例如,Eringen 理论基于加权平均的思想,通过直接引入空间分布的核函数的方式提出了形如(1.1)的本构关系。近场动力学的本构力函数中同样采用了核函数的思想,如本构力函数(1.4)中核函数为 Gaussian 函数。核函数的形式及其含有的特征长度的确定,本身就是有待解决的问题,实际上一直以来都是非局部理论研究中需要跨越的两大障碍。又如,Willis 理论则是直接引入了一种均匀参考材料,通过数学推导,给出了一组较为抽象的含有速度耦合项的方程(1.2)。研究者们试图从不同的角度去解答速度耦合项的物理机制^[48,49,87],至今仍无统一说法。另外,由于参考材料选取上的不确定性和数学求解上的难度^[45],该方程组的(1.2)显式表达及材料参数的定量表征极其困难。研究者们不得不寻求各种条件下的近似形式^[46,47,50]。再如,Mindlin 理论虽然基于具有微结构的材料模型,却在定义能量密度函数(宏观变形能密度函数和动能密度函数)时引入

了多个具有唯象性质的系数，导致控制方程中高阶项的系数无法确定。而高阶理论中同样存在着类似的问题，高阶项系数的确实仍是微分型非局部理论中一个重要的研究课题，其物理机制有待深探。

(3) 适用于多场耦合的时空耦合非局部理论有待建立

从广义力和广义流的角度考虑^[88]，弹性非局部理论的思想可推广至宏观热传导理论和热弹性理论等多物理场或多场耦合宏观连续统中，以实现多物理场或多场耦合环境下新型材料宏观性能的准确预测。例如，现有的非傅里叶热传导理论引入了延迟时间这一特征尺度，可看作是“弱时间非局部理论”；在此基础上也发展出了同时考虑空间和时间非局部性的非傅里叶热传导理论^[89]。相继地，将已有的热传导理论思想与弹性理论思想结合，衍生出了一系列广义热弹性理论^[90-92]。它们大都是时间非局部理论，极个别的在变形方程中同时考虑了时空非局部性，但热传导方程仍是时间非局部的。变形方程和热传导方程同时考虑时空非局部性的热弹性理论几乎还是空白。

(4) 以近场动力学为代表的位移积分型非局部弹性理论的基础研究匮乏

随着新型材料的大量应用，不连续问题，如断裂破坏、相变等变得极为复杂且日益突出。位移积分型非局部弹性理论具有处理不连续问题的独特优势，因此开展该类型理论的基础研究既符合当代科学背景又具有前瞻性。近场动力学作为该类型的典型代表甚至是唯一代表（Kunin 理论看作是近场动力学的前身），起步较晚，直到 2010 年其理论框架才初步完成。直到今天一些理论上的关键问题仍在不断地完善中。因此其基础研究较为薄弱，且目前关于近场动力学的研究以数值计算和应用居多。在基本问题如基本解、动态特性、适定性等方面的研究相对匮乏。而基本问题的研究往往是对一个理论基本属性的考察，与理论本身的发展息息相关。

1.4 本文的主要工作

言而总之，非局部弹性理论的研究还存在许多挑战和机遇，是一个具有理论和应用价值的前沿性科学研究方向。针对以上非局部弹性理论中存在的四个问题，本文的主要开展如下研究：首先，针对非均匀介质，研究非局部性的起源，解释非局部理论的物理机制，实现其定量表征，并在此基础上探讨建立满足以上三点要求的时空耦合非局部弹性理论的可能性；其次，探究时空耦合非局部热弹性理论，并分别建立相应的热传导和热力耦合理论；最后，开展近场动力学的基础研究，包括格林函数解、动态界面传播及波在界面的反射、透射等问题。本文内容具体安排为：

第一章，主要介绍论文的选题背景及研究意义，综述国内外非局部弹性理论的研究进展，并在此基础上提出本文的研究内容。

第二章，基于非均匀介质的力学模型，研究了时空耦合非局部理论的起源、物理机制、定量表征及实现满足三点要求的非局部理论的可能性。首先引入移动平均

(moving average) 的概念^[13,93], 推得了描述非均匀介质宏观性能的控制方程, 时空耦合非局部项在该方程中自然产生, 并可定量表征; 随后, 探讨了该方程与现有非局部理论控制方程的区别; 最后研究了已有非局部理论控制方程的变换不变性, 并得到了可满足三点要求的非局部弹性理论。

第三章, 建立了时空耦合非局部热弹性理论。首先基于复合材料圆柱模型, 探讨了时空耦合非局部热弹性理论的起源, 并建立了同时考虑非局部和非傅里叶效应(因其引入了时间特征尺度, 可看作是时间非局部)的位移积分型热传导理论, 并在基础上发展了变形方程和热传导方程同时考虑时空非局部性的热力耦合理论, 并证明了解的唯一性。

第四章, 研究了近场动力学理论的基本问题。首先, 以解析方式研究了线性化态型近场动力学的动态特性, 包括弹性波的色散关系、群速度、相速度及其动态响应的格林函数解; 随后给出了线性化态型近场动力学的动、静态格林函数, 并将其原有形式下的发散积分成功分解成收敛积分和初等函数叠加的形式; 继而提出了线性化态型近场动力学的间断条件, 并解析地得到了不连续场的演化规律; 最后, 系统地建立了近场动力学热扩散问题的格林函数解及其稳态和非稳态格林函数的表达形式。

第五章, 在近场动力学理论的基础上, 开展了以界面为代表的非连续问题的研究, 包括动态界面传播和波在界面的反射、透射及人工界面条件。首先以 kink (扭结) 传播为例, 从离散粒子模型出发, 建立了近场动力学理论的连续介质模型, 并解析地给出了其平衡构形、动态解及动力学关系, 进一步探讨了近场动力学模型与现有连续介质模型的关系及相互转化; 其次在近场动力学框架内建立了数值模拟无限大问题时的透射人工边界、双向界面边界, 可实现出射波无反射的透射及入射波无失真的注入计算区域, 并将其用于模拟含有缺陷损伤、复合材料及震源等动态波传播问题。

第二章 非均质材料的时空耦合非局部弹性理论

2.1 引言

如前所述，现有非局部弹性理论普遍存在物理机制不清楚、材料参数无法定量表征的问题，因此其非局部性的来源大多缺少令人信服的力学模型^[14]。为此，Silling^[14]以二维三明治复合材料结构为研究对象，通过截面平均的方式，将二维模型等效为一个一维模型，得到了截面平均位移的控制方程。该方程同时含有应变微分项和位移积分项，与 Kröner 理论的控制方程一致^[3]。积分项中的核函数具有 $e^{-|x|/\ell}$ 的形式，其中 ℓ 与三明治结构各组分材料材料性能、体积分数、几何尺寸相关，该相关性可由显式表达式定量给出。该方程可进一步近似为线性化的键型近场动力学控制方程，从而解释了键型近场动力学中非局部来源及各参数物理意义。该工作虽然仅仅简单地讨论了一维的非局部弹性理论，却在探索非局部起源的思路带来了很大的启示。其思路可凝练为：基于非均质材料模型得到其平均位移场所满足的控制方程，该方程自然地涉及可定量表征的非局部积分项。与此同时，同样是基于非均质材料模型得到的 Willis 方程^[20,21,45] 和 Mindlin 方程^[83]，却均含有时空耦合非局部项；Alali 和 Lipton^[94] 基于各组分材料为近场动力学材料（力学性能由近场动力学控制方程描述的材料定义为所谓的“近场动力学材料”^[8]）的非均质材料模型，同样得到了平均位移场的时空耦合非局部控制方程。以上三种理论在推导过程中引入了不同的物理假设，但三者的结论却极其一致，并且不同于 Silling^[14] 的结果。通过比较可以发现，该不同是由 Silling^[14] 在推导过程中，忽略了组分材料的惯性项导致的。因此，我们猜想考虑惯性项的影响，非均质材料的宏观力学性能应遵从时空耦合非局部控制方程。

本章将基于非均质材料模型，建立可定量表征的时空耦合非局部弹性理论。首先从非均质材料模型出发，同时考虑惯性项、变形项和体力项的影响，探讨时空耦合非局部性的起源，自然地导出描述非均质材料宏观性能的时空耦合非局部控制方程。在此基础上分析该方程与现有非局部弹性理论的控制方程的区别和联系，并尝试地实现现有非局部弹性理论的定量表征。然后，以纤维增强复合材料为例，考虑惯性项的影响，证明本文提及的猜想。再次，通过色散关系及算例定量对比各现有理论的动态特性和动态响应。最后，研究现有的非局部理论是否满足变换不变性，并通过近似手段得到满足三点要求的非局部弹性理论。

2.2 时空耦合非局部性的起源

为了研究由多相组分材料组成的非均质材料的宏观等效控制方程，我们从位移场出发，给出时空耦合非局部方程自下而上的推导过程。首先引入研究非均质材料时常用（如 Hashin^[13] 和 Nemat-Nasser^[93]）的一个概念：移动平均（moving average）。移动平均是指，对于以物质点 \mathbf{x} 为中心的代表性体积元 (RVE) 取体平均。根据这一概念，非均质材料的等效性能可由关于 RVE 的平均场来描述。对非均质材料的任一参考构型 \mathcal{B} ，移动平均位移^[13] 可表示为

$$\mathbf{u}_H(\mathbf{x}, t) := \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{u}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t) dV_{\boldsymbol{\xi}}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{V} \quad (2.1)$$

其中 \mathcal{V} 为 RVE 构形， V 为 RVE 的体积。移动平均位移场 $\mathbf{u}_H(\mathbf{x}, t)$ 反映了非均质材料的等效性能。式 (2.1) 意味着引入了一个原点位于 \mathbf{x} 的局部坐标系 ξ_i ($i = 1, 2, 3$) 来表征 RVE 内的任一点 $\boldsymbol{\xi}$ 。 $\mathbf{u}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t)$ 是 RVE 中点 $\boldsymbol{\xi}$ 的位移，即 Hashin^[13] 所说的微观变量，这里称为局部位移。相应地， \mathbf{x} 是整体坐标系。RVE 中局部位移场 $\mathbf{u}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t)$ 可不失一般性地分解为移动平均位移场叠加一个扰动场 $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t)$ ，即

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t) = \mathbf{u}_H(\mathbf{x}, t) + \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t) \quad (2.2)$$

上式中不同的组分相的扰动场不同。例如，对于由离散夹杂 (I) 和连续基体 (M) 组成的两相复合材料，扰动场可表示为

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t) = \begin{cases} \tilde{\mathbf{u}}_I(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t), & \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{V}_I \\ \tilde{\mathbf{u}}_M(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t), & \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{V}_M \end{cases} \quad (2.3)$$

其中 \mathcal{V}_I 和 \mathcal{V}_M 分别表示 RVE 中夹杂和基体所对应的空间区域。由公式 (2.1) 和式 (2.2) 可得扰动场所满足的限制条件为

$$\int_{\mathcal{V}} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t) dV_{\boldsymbol{\xi}} = 0 \quad (2.4)$$

由于本文集中研究非局部弹性理论，因此假设组成非均质材料的夹杂 (I) 和基体 (M) 均为经典弹性材料。接下来的主要任务是探究该非均质材料的平均位移场 $\mathbf{u}_H(\mathbf{x}, t)$ 所应满足的控制方程。

由经典连续介质力学可知，动量守恒方程在惯性坐标系中可表示为

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} = \int_{\mathcal{B}} \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} + \int_{\mathcal{B}} \bar{\mathbf{t}}_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}, t) dS_{\mathbf{x}}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B} \quad (2.5)$$

其中 $\bar{\mathbf{b}}$ 和 $\bar{\mathbf{p}}$ 分别为点 \mathbf{x} 的体力和单位体积内的动量。 $\bar{\mathbf{t}}_{\mathbf{N}}$ 表示法向为 \mathbf{N} 的单位面积上的接触面力，且 $\bar{\mathbf{t}}_{\mathbf{N}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{N}$ 其中 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 为点 \mathbf{x} 的二阶 Cauchy 应力；该积分对整个参考构型或参考构型的任一部分均成立。由式 (2.1) 知，整体坐标系中任一物质点 \mathbf{x} 的物理场均通

过 RVE 的体平均得到。因此整体坐标系中, 任一点 \mathbf{x} 的单位体积内的动量 $\bar{\mathbf{p}}$ 为

$$\bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \mathbf{v}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t) dV_{\boldsymbol{\xi}} \quad (2.6)$$

类似地, 任一点 \mathbf{x} 的体力和 Cauchy 应力为

$$\bar{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t) dV_{\boldsymbol{\xi}}, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t) dV_{\boldsymbol{\xi}} \quad (2.7)$$

将式 (2.6) 和 (2.7) 代入式 (2.5) 可得

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \mathbf{v}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t) dV_{\boldsymbol{\xi}} dV_{\mathbf{x}} = \int_{\mathcal{B}} \int_{\mathcal{V}} [\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t)] dV_{\boldsymbol{\xi}} dV_{\mathbf{x}} + \int_{\mathcal{B}} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t) dV_{\boldsymbol{\xi}} dV_{\mathbf{x}} \quad (2.8)$$

其中, $\rho(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})$ 为 RVE 中点 $\boldsymbol{\xi}$ 的密度。式 (2.8) 成立的一个充分条件为

$$\rho(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t) \quad (2.9)$$

且应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 与位移 \mathbf{u} 之间满足经典线弹性本构关系^[46]

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) : (\nabla_{\mathbf{x}}^s \mathbf{u} + \nabla_{\boldsymbol{\xi}}^s \mathbf{u}) \quad (2.10)$$

其中, $\mathbf{C}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})$ 为四阶刚度张量; $\nabla_{\mathbf{x}}^s$ 和 $\nabla_{\boldsymbol{\xi}}^s$ 分别是关于 \mathbf{x} 和 $\boldsymbol{\xi}$ 的对称梯度算子。由式 (2.9) 和式 (2.10) 可得局部位移的控制方程

$$\rho(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\mathbf{C}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) : \nabla_{\mathbf{x}}^s \mathbf{u}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t)] + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\mathbf{C}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) : \nabla_{\boldsymbol{\xi}}^s \mathbf{u}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t)] + \mathbf{b}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t) \quad (2.11)$$

式 (2.11) 两边关于 RVE 取体平均可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}} (\rho(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t)) dV_{\boldsymbol{\xi}} &= \frac{1}{V} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \int_{\mathcal{V}} [\mathbf{C}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) : \nabla_{\mathbf{x}}^s \mathbf{u}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t)] dV_{\boldsymbol{\xi}} + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t) dV_{\boldsymbol{\xi}} \\ &+ \frac{1}{V} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \int_{\mathcal{V}} [\mathbf{C}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) : \nabla_{\boldsymbol{\xi}}^s \mathbf{u}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t)] dV_{\boldsymbol{\xi}} \end{aligned} \quad (2.12)$$

根据 Nemat-Nasser 书^[93] 中光滑权函数的方法和高斯定理, 式 (2.12) 右端最后一项可近似为

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \int_{\mathcal{V}} [\mathbf{C}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t)] dV_{\boldsymbol{\xi}} \approx \int_{\mathcal{V}} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot [\mathbf{C}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t)] dV_{\boldsymbol{\xi}} = \int_{\mathcal{S}} [\mathbf{C}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t)] \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{S}} dS_{\boldsymbol{\xi}} \quad (2.13)$$

其中 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \nabla_{\boldsymbol{\xi}}^s \mathbf{u} = \nabla_{\boldsymbol{\xi}}^s \ddot{\mathbf{u}}$; $\mathbf{n}_{\mathcal{S}}$ 为 RVE 表面 \mathcal{S} 上点 $\boldsymbol{\xi}$ 的法向量。Hashin^[13] 指出应力关于局部坐标的散度的体平均为零, 即式 (2.13) 第二个积分为零。那么, 式 (2.13) 最右端积分也等于零。由于应力场 $\mathbf{C}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t)$ 是由材料非均质性导致的扰动应力的一部分, 式 (2.13) 最右端积分代表该部分扰动应力场在 RVE 表面产生的牵引力之和。因此, 式 (2.13) 最右端积分等于零, 这意味着该部分的扰动应力场对整体惯性力的贡献可以忽略。然后将位移场 (2.2) 代入式 (2.12), 可得

$$\langle \rho \rangle \ddot{\mathbf{u}}_H(\mathbf{x}, t) + (\rho_I - \langle \rho \rangle) \ddot{\boldsymbol{\phi}}(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [(\mathbf{C}) : \nabla_{\mathbf{x}}^s \mathbf{u}_H(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{C}_I - \langle \mathbf{C} \rangle) : \nabla_{\mathbf{x}}^s \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, t)] + \langle \mathbf{b} \rangle \quad (2.14)$$

其中符号 $\langle \rangle$ 表示关于 RVE 取体平均； $\langle \rho \rangle$ 、 $\langle \mathbf{C} \rangle$ 和 $\langle \mathbf{b} \rangle$ 分别为

$$\langle \rho \rangle = \frac{\rho_I V_I + \rho_M V_M}{V}, \quad \langle \mathbf{C} \rangle = \frac{\mathbf{C}_I V_I + \mathbf{C}_M V_M}{V}, \quad \langle \mathbf{b} \rangle = \frac{\langle \mathbf{b} \rangle_I V_I + \langle \mathbf{b} \rangle_M V_M}{V} \quad (2.15)$$

上式中, $\langle \rangle_I$ 和 $\langle \rangle_M$ 分别表示关于夹杂和基体的体积平均； ρ_I 和 ρ_M 分别表示夹杂和基体的密度； \mathbf{C}_I 和 \mathbf{C}_M 分别表示夹杂和基体的刚度张量；函数 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 定义为

$$\phi(\mathbf{x}, t) := -\frac{1}{V_M} \int_{\mathcal{V}_M} \tilde{\mathbf{u}}_M(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t) dV_M \quad (2.16)$$

控制方程 (2.14) 同时含有未知量 $\mathbf{u}_H(\mathbf{x}, t)$ 和 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 。为了得到关于 $\mathbf{u}_H(\mathbf{x}, t)$ 的控制方程, 需要一个额外的方程来消去 $\phi(\mathbf{x}, t)$, 该方程可通过基体的运动方程得到。

类似于式 (2.12) 的推导过程, 式 (2.11) 两边关于基体进行体平均可得

$$\rho_M \ddot{\phi}(\mathbf{x}, t) - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\mathbf{C}_M : \nabla_{\mathbf{x}}^s \phi(\mathbf{x}, t)] + \psi = \rho_M \ddot{\mathbf{u}}_H(\mathbf{x}, t) - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\mathbf{C}_M : \nabla_{\mathbf{x}}^s \mathbf{u}_H(\mathbf{x}, t)] - \langle \mathbf{b} \rangle_M \quad (2.17)$$

其中

$$\psi = \frac{1}{V_M} \int_{\mathcal{V}_M} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\mathbf{C}_M : \nabla_{\boldsymbol{\xi}}^s \mathbf{u}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t)] dV_{\boldsymbol{\xi}} \quad (2.18)$$

根据 Nemat-Nasser 书^[93] 中光滑权函数的方法可得, $\psi \approx -\nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\mathbf{C}_M : \nabla_{\mathbf{x}}^s \phi(\mathbf{x}, t)]$ 。将方程 (2.17) 中 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 的看作是未知函数, $\mathbf{u}_H(\mathbf{x}, t)$ 看作是已知函数, 由格林函数法 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 可表示为

$$\phi(\mathbf{x}, t) = [\rho_M \ddot{\mathbf{u}}_H(\mathbf{x}, t) - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\mathbf{C}_M : \nabla_{\mathbf{x}}^s \mathbf{u}_H(\mathbf{x}, t)] - \langle \mathbf{b} \rangle_M] * \mathbf{g}_u \quad (2.19)$$

其中, \mathbf{g}_u 为方程 (2.17) 的格林函数；符号 $*$ 表示关于空间和时间的卷积, 即一个时空耦合积分算子

$$\mathbf{A} * \mathbf{B} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - \tau) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}', \tau) dV_{\mathbf{x}'} d\tau = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{A}(\mathbf{x}', \tau) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - \tau) dV_{\mathbf{x}'} d\tau \quad (2.20)$$

其中, \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 可以是任意阶张量； \mathbb{R}^n 代表 n 维欧氏空间, $n = 1, 2, 3$ 。

将式 (2.19) 代入方程 (2.14), 消去 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 可得关于 $\mathbf{u}_H(\mathbf{x}, t)$ 的控制方程

$$\begin{aligned} \rho_I \ddot{\mathbf{u}}_H(\mathbf{x}, t) + (\langle \rho \rangle - \rho_I) \ddot{\mathbf{u}}_H * \mathbf{G}_u = & \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \{ \mathbf{C}_I : \nabla_{\mathbf{x}}^s \mathbf{u}_H(\mathbf{x}, t) + [(\langle \mathbf{C} \rangle - \mathbf{C}_I) : \nabla_{\mathbf{x}}^s \mathbf{u}_H] * \mathbf{G}_u \} \\ & + \langle \mathbf{b} \rangle - \left\{ (\langle \rho \rangle - \rho_I) \langle \ddot{\mathbf{b}} \rangle_I - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [(\langle \mathbf{C} \rangle - \mathbf{C}_I) : \nabla_{\mathbf{x}}^s \langle \mathbf{b} \rangle_I] \right\} * \mathbf{g}_u \end{aligned} \quad (2.21)$$

其中, 二阶对称张量 $\mathbf{G}_u = -\nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\mathbf{C}_M : \nabla_{\mathbf{x}}^s \mathbf{g}_u(\mathbf{x}, t)]$ 。控制方程 (2.21) 可进一步表示为经典控制方程的形式

$$\dot{\mathbf{p}}_{eff} = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{eff} + \mathbf{b}_{eff} \quad (2.22)$$

其中, 等效应力、动量密度和体力分别为

$$\boldsymbol{\sigma}_{eff} = \mathbf{C}_I : \boldsymbol{\epsilon}_H + [(\langle \mathbf{C} \rangle - \mathbf{C}_I) : \boldsymbol{\epsilon}_H] * \mathbf{G}_u \quad (2.23a)$$

$$\mathbf{p}_{eff} = \rho_I \dot{\mathbf{u}}_H + (\langle \rho \rangle - \rho_I) \dot{\mathbf{u}}_H * \mathbf{G}_u \quad (2.23b)$$

$$\mathbf{b}_{eff} = \langle \mathbf{b} \rangle - \left\{ (\langle \rho \rangle - \rho_I) \langle \ddot{\mathbf{b}} \rangle_I - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [(\langle \mathbf{C} \rangle - \mathbf{C}_I) : \nabla_{\mathbf{x}}^s \langle \mathbf{b} \rangle_I] \right\} * \mathbf{g}_u \quad (2.23c)$$

上式中，等效应力张量 $\boldsymbol{\sigma}_{eff}$ 对称，即 $\boldsymbol{\sigma}_{eff} = \boldsymbol{\sigma}_{eff}^T$ ；对称应变张量 $\boldsymbol{\epsilon}_H = \nabla_{\mathbf{x}}^s \mathbf{u}_H(\mathbf{x}, t)$ 。从式 (2.23) 可知：其一，三个等效物理量均可显式地表达，且表达式中均含有关于空间和时间的卷积符号，即均含有时空耦合非局部积分项；其二，表达式涉及的参数可定量表征，式 (2.15) 进一步表明涉及的参数可由 RVE 的微结构信息唯一定量确定。所以，方程 (2.21) 或方程 (2.22) 是一个显式的可定量表征的时空耦合非局部积分方程。该方程一个突出特点就是首次表明等效体力也表现出时空耦合非局部性。该非局部性来源于非均质材料各组分的密度不同和刚度不同。而在已有文献^[14,20,21,45]中，等效控制方程的推导过程中往往是先忽略体力，然后再在得到的等效控制方程中直接添加体力项。这一做法导致等效体力的非局部性无法体现，而等效体力在超材料中日益受到关注^[95-97]。此外，该方程的其他特点，将在下一节与现有非局部弹性理论的区别和联系中，具体展开讨论。下面，进一步讨论方程 (2.21) 或方程 (2.22) 对刚性夹杂和孔洞两类特例情况的适用性及具体表达形式。

若为刚性夹杂，则夹杂不变形，其控制方程为

$$\rho_I \ddot{\mathbf{u}}_I(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t) \quad (2.24)$$

仿照方程 (2.21) 的推导过程，可得到刚性夹杂情况下， \mathbf{u}_H 的控制方程仍可表达为 (2.22)，其中各等效物理量变为

$$\boldsymbol{\sigma}_{eff} = \left[\frac{V_M}{V} \mathbf{C}_M : \boldsymbol{\epsilon}_H \right] * \mathbf{G}_u \quad (2.25a)$$

$$\mathbf{p}_{eff} = \rho_I \dot{\mathbf{u}}_H + (\langle \rho \rangle - \rho_I) \dot{\mathbf{u}}_H * \mathbf{G}_u \quad (2.25b)$$

$$\mathbf{b}_{eff} = \langle \mathbf{b} \rangle - \left\{ (\langle \rho \rangle - \rho_I) \langle \ddot{\mathbf{b}} \rangle_I - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[\frac{V_M}{V} \mathbf{C}_M : \nabla_{\mathbf{x}}^s \langle \mathbf{b} \rangle_I \right] \right\} * \mathbf{g}_u \quad (2.25c)$$

若夹杂为孔洞，可把夹杂看作 $\rho_I = 0$ 且 $\mathbf{C}_I = \mathbf{0}$ 。重复 (2.21) 的推导过程，同样可得 \mathbf{u}_H 的控制方程为 (2.22)，其中各等效物理量的表达式同式 (2.25) 只是此时 $\rho_I = 0$ 。另一方面，忽略式 (2.23) 中与夹杂变形相关的项，可直接得到刚性夹杂的等效物理量的表达式 (2.25)；而令公式 (2.23) 中 $\rho_I = 0$ 且 $\mathbf{C}_I = \mathbf{0}$ 可直接得到孔洞夹杂的等效物理量的表达式。由此可知方程 (2.21) 或方程 (2.22) 适用于刚性夹杂和孔洞这两类特殊情况。

2.3 与现有非局部弹性理论的关系

本节将探讨上节推得的时空耦合非局部控制方程 (2.21) 或 (2.22) 与现有非局部弹性理论的联系，以便深刻理解不同非局部弹性理论的物理意义，进而实现其定量表征。首先，将方程 (2.21) 与 Mindlin^[83]、Willis^[20,21,45]、及 Alali 和 Lipton^[94] 分别提出的时

空耦合非局部控制方程进行比较。然后，时空耦合非局部控制方程 (2.21) 或 (2.22) 可简化为空间非局部控制方程，从而与现有的空间非局部弹性理论进行比较。

2.3.1 与现有时空耦合非局部弹性理论的关系

Mindlin^[83] 假设扰动位移场中的局部坐标和整体坐标可实现变量分离，即扰动位移场可表示为一个局部坐标函数和一个整体坐标函数的点积。为了能够建立与 Mindlin 方程的联系，我们采用 Mindlin^[83] 的这一假设，将基体的扰动位移表达为 $\tilde{\mathbf{u}}_M(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, t) = \mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ ，其中 $\mathbf{H}(\boldsymbol{\xi})$ 为二阶张量， $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ 为向量。则式 (2.18) 可表达为

$$\psi = -\frac{1}{V_M} \int_{V_M} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot [\mathbf{C}_M : \nabla_{\boldsymbol{\xi}}^s \phi(\mathbf{x}, t)] dV_M = \boldsymbol{\beta} \cdot \phi(\mathbf{x}, t) \quad (2.26)$$

其中，二阶张量 $\boldsymbol{\beta}$ 为

$$\boldsymbol{\beta} = \left[\int_{V_M} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot [\mathbf{C}_M : \nabla_{\boldsymbol{\xi}}^s \mathbf{H}(\boldsymbol{\xi})] dV_M \right] \cdot \left[- \int_{V_M} \mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}) dV_M \right]^{-1} \quad (2.27)$$

考虑到二阶张量 $\mathbf{C}_M^{-1} : \boldsymbol{\beta}$ 的分量具有长度⁻²的量纲，可定义特征长度为

$$\ell_c \equiv \sqrt{3 / \|\mathbf{C}_M^{-1} : \boldsymbol{\beta}\|_F} \quad (2.28)$$

其中，符号 $\|\cdot\|_F$ 表示 Frobenius 范数。将式 (2.26) 代入方程 (2.17) 可得方程 (2.17) 的格林函数 \mathbf{g}_u 。重复上一节中方程 (2.21) 的推导过程，可得到与方程 (2.21) 相同的形式，只是 $\mathbf{G}_u = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{g}_u$ 。

对于方程 (2.21)，令 $\mathbf{G}_u = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{g}_u$ ，并同时作傅里叶变换和拉普拉斯变换，可得

$$(\rho_I s^2 \mathbf{I} + (\langle \rho \rangle - \rho_I) s^2 \mathcal{J} \{ \mathbf{G}_u \}) \cdot \mathcal{J} \{ \mathbf{u}_H \} = \mathcal{J} \{ \mathcal{L}_I [\mathbf{u}_H] \} + \mathcal{J} \{ (\mathcal{L}_C - \mathcal{L}_I) [\mathbf{u}_H] \} \cdot \mathcal{J} \{ \mathbf{G}_u \} \quad (2.29)$$

其中， \mathcal{L}_I 和 \mathcal{L}_C 为空间微分算子，有 $\mathcal{L}_I [\mathbf{u}_H] = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\mathbf{C}_I : \nabla_{\mathbf{x}}^s \mathbf{u}_H]$ 和 $\mathcal{L}_C [\mathbf{u}_H] = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\langle \mathbf{C} \rangle : \nabla_{\mathbf{x}}^s \mathbf{u}_H]$ 。 \mathcal{J} 为积分变换算子，有 $\mathcal{J} \{ \mathbf{u} \} = \mathcal{L} \{ \mathcal{F} \{ \mathbf{u} \} \}$ ，其中 \mathcal{F} 和 \mathcal{L} 分别表示傅里叶变换和拉普拉斯变换。由傅里叶变换关于线性微分算子的性质可得

$$\mathcal{J} \{ \mathcal{L}_I [\mathbf{u}_H] \} = -\mathbf{Q}_I(\mathbf{k}) \cdot \mathcal{J} \{ \mathbf{u}_H \} \quad (2.30a)$$

$$\mathcal{J} \{ (\mathcal{L}_C - \mathcal{L}_I) [\mathbf{u}_H] \} = -(\mathbf{Q}(\mathbf{k}) - \mathbf{Q}_I(\mathbf{k})) \cdot \mathcal{J} \{ \mathbf{u}_H \} \quad (2.30b)$$

其中， $\mathbf{Q}_I(\mathbf{k})$ 和 $\mathbf{Q}(\mathbf{k})$ 分别为线性微分算子 \mathcal{L}_I 和 \mathcal{L}_C 傅里叶变换产生的二阶张量。将式 (2.30) 代入式 (2.29) 可得

$$[(\rho_I s^2 \mathbf{I} + \mathbf{Q}_I(\mathbf{k})) \cdot [\mathcal{J} \{ \mathbf{G}_u \}]^{-1} + (\langle \rho \rangle - \rho_I) s^2 \mathbf{I} + \mathbf{Q}(\mathbf{k}) - \mathbf{Q}_I(\mathbf{k})] \cdot \mathcal{J} \{ \mathbf{G}_u \} \cdot \mathcal{J} \{ \mathbf{u}_H \} = \mathbf{0} \quad (2.31)$$

上式中, $\mathcal{J}\{\mathbf{G}_u\}$ 可通过对式 (2.17) 进行傅里叶变换和拉普拉斯变换求得

$$\mathcal{J}\{\mathbf{G}_u\} = \boldsymbol{\beta} \cdot [\mathbf{Q}_M(\mathbf{k}) + \rho_M s^2 \mathbf{I} + \boldsymbol{\beta}]^{-1}, \quad [\mathcal{J}\{\mathbf{G}_u\}]^{-1} = (\mathbf{Q}_M(\mathbf{k}) + \rho_M s^2 \mathbf{I}) \cdot \boldsymbol{\beta}^{-1} + \mathbf{I} \quad (2.32)$$

将式 (2.32) 代入式 (2.31) 可得

$$\mathcal{J}\{\mathbf{G}_u\} \cdot [\langle \rho \rangle s^2 \mathbf{I} + \mathbf{Q} + (\rho_M s^2 \mathbf{I} + \mathbf{Q}_M) \cdot (\rho_I s^2 \mathbf{I} + \mathbf{Q}_I) \cdot \boldsymbol{\beta}^{-1}] \cdot \mathcal{J}\{\mathbf{u}_H\} = \mathbf{0} \quad (2.33)$$

再对上式进行傅里叶逆变换和拉普拉斯逆变换可得

$$\mathbf{G}_u * \{ \langle \rho \rangle \mathbf{u}_{Htt} + \mathcal{L}_C[\mathbf{u}_H] + (\rho_M \rho_I \mathbf{u}_{Htttt} + \rho_I \mathcal{L}_M[\mathbf{u}_{Htt}] + \rho_M \mathcal{L}_I[\mathbf{u}_{Htt}] + \mathcal{L}_I[\mathcal{L}_M[\mathbf{u}_H]]) \cdot \boldsymbol{\beta}^{-1} \} = \mathbf{0} \quad (2.34)$$

其中, 下标 t 表示对时间求偏导数。由 Lerch 定理可得, 式 (2.34) 与式 (2.21) 等效。又函数 \mathbf{G}_u 通常不为零, 式 (2.34) 成立的一个充分条件为

$$\langle \rho \rangle \mathbf{u}_{Htt} + \mathcal{L}_C[\mathbf{u}_H] + (\rho_M \rho_I \mathbf{u}_{Htttt} + \rho_I \mathcal{L}_M[\mathbf{u}_{Htt}] + \rho_M \mathcal{L}_I[\mathbf{u}_{Htt}] + \mathcal{L}_I[\mathcal{L}_M[\mathbf{u}_H]]) \cdot \boldsymbol{\beta}^{-1} = \mathbf{0} \quad (2.35)$$

上式与 Mindlin^[83] 理论消元后得到的位移控制方程具有相同的形式。

上述推导表明, 时空耦合非局部方程 (2.21) 可看作是 Mindlin 方程的积分形式。与 Mindlin 方程^[83,98] 相比, 方程 (2.21) 不涉及四阶导数项, 且各项系数可定量表征, 具有明确的物理意义, 其中 $\boldsymbol{\beta}$ 与微结构的几何及材料参数相关。

接下来, 我们研究时空耦合非局部方程 (2.22) 与 Willis 方程^[20,21,45](1.2) 的联系。忽略等效体力的影响, 方程 (2.23a) 和 (2.23b) 可表示为 Willis 方程 (1.2) 的形式

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{eff} \\ \mathbf{p}_{eff} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{eff}^\ddagger & \mathbf{S}_{eff}^\ddagger \\ \mathbf{D}_{eff}^\ddagger & \rho_{eff}^\ddagger \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_H \\ \dot{\mathbf{u}}_H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle \mathbf{C} \rangle & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \langle \rho \rangle \mathbf{I} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_H \\ \dot{\mathbf{u}}_H \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{eff}^\ddagger &= -(\mathbf{C}_I - \langle \mathbf{C} \rangle) : (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\mathbf{C}_M : \nabla_{\mathbf{x}}^s \mathbf{g}_u]) \\ \rho_{eff}^\ddagger &= (\rho_I - \langle \rho \rangle) \rho_M \ddot{\mathbf{g}}_u \\ \mathbf{S}_{eff}^\ddagger &= -\mathbf{D}_{eff}^\ddagger = \frac{1}{2} [(\rho_I - \langle \rho \rangle) \mathbf{C}_M + \rho_M (\mathbf{C}_I - \langle \mathbf{C} \rangle)] : \nabla_{\mathbf{x}}^s \dot{\mathbf{g}}_u \end{aligned} \quad (2.37)$$

方程 (2.36) 具有 Willis 方程的形式, 且等效应力和等效动量密度中速度耦合项均不为零。当且仅当 $\langle \mathbf{C} \rangle = \mathbf{C}_I$ 且 $\langle \rho \rangle = \rho_I$, 方程 (2.36) 和 Willis 方程中的时空耦合非局部项才会消失。与 Willis 方程不同的是, 方程 (2.36) 中各参数可由非均质材料的微观结构信息唯一确定。我们将在本章最后讨论方程 (2.36) 的变换不变性。

Alali 和 Lipton^[94] 采用动态均匀化的方法, 研究了由近场动力学材料组成的非均质材料的宏观力学性能。研究表明均匀位移场的控制方程仍具有时空耦合非局部积分项, 该方程是由半群理论 (semi-group theory) 给出的形式解, 其时空耦合非局部的特性与方程 (2.21) (或 (2.22)) 一致。不同的是, Alali 和 Lipton^[94] 方程中的时空耦合非

局部性仅仅是由密度不同引起的，当各组分的密度相同时，Alali 和 Lipton^[94] 方程中的时空耦合非局部项消失。此结论不同于前段提到的方程 (2.21)（或 (2.22)）和 Willis 方程的特性。

2.3.2 与现有空间非局部弹性理论的关系

在本章引言部分曾提到 Silling^[14] 由于忽略了组分材料惯性项的影响得到了空间非局部方程，照此思路，方程 (2.21) 是否也可简化为空间非局部方程呢？注意到 Silling^[14] 文章中的扰动位移场与 Mindlin^[83] 假设的形式一致。为此，在 (2.17) 的推导过程中忽略基体惯性项的影响，并令 ψ 同式 (2.26)，关于 ϕ 的方程 (2.17) 变为空间微分方程

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\mathbf{C}_M : \nabla_{\mathbf{x}}^s \phi(\mathbf{x}, t)] - \beta \cdot \phi = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\mathbf{C}_M : \nabla_{\mathbf{x}}^s \mathbf{u}_H(\mathbf{x}, t)] + \langle \mathbf{b} \rangle_M \quad (2.38)$$

则上式的格林函数仅与空间相关。重复上一节的推导过程，将会得到形如 (2.22) 的控制方程，只是其中的等效力、动量密度和体力被替换为

$$\boldsymbol{\sigma}_{eff} = \mathbf{C}_I : \boldsymbol{\epsilon}_H + \int_{\mathbb{R}^n} [(\langle \mathbf{C} \rangle - \mathbf{C}_I) : \boldsymbol{\epsilon}_H(\mathbf{x}', t)] \cdot \mathbf{G}_u(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV_{\mathbf{x}'} \quad (2.39a)$$

$$\mathbf{p}_{eff} = \rho_I \dot{\mathbf{u}}_H + \int_{\mathbb{R}^n} (\langle \rho \rangle - \rho_I) \dot{\mathbf{u}}_H(\mathbf{x}', t) \cdot \mathbf{G}_u(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV_{\mathbf{x}'} \quad (2.39b)$$

$$\mathbf{b}_{eff} = \langle \mathbf{b} \rangle - \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ (\langle \rho \rangle - \rho_I) \langle \ddot{\mathbf{b}} \rangle_I - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [(\langle \mathbf{C} \rangle - \mathbf{C}_I) : \nabla_{\mathbf{x}}^s \langle \mathbf{b} \rangle_I] \right\} \cdot \mathbf{g}_u(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV_{\mathbf{x}'} \quad (2.39c)$$

其中 $\mathbf{G}_u = \beta \cdot \mathbf{g}_u$ ， \mathbf{g}_u 为方程 (2.38) 的格林函数。可见，式 (2.39) 仅涉及空间非局部项，方程 (2.21) 简化为空间非局部方程。

相比于现有的空间非局部理论，如 Eringen 理论^[4,5]、Kunin 理论^[52]、PD 理论^[6,8]，式 (2.39) 的主要特点之一就是，等效模量和等效动量密度均含有空间非局部项。这一特征与 Dayal^[10] 最近提出的动力非局部近场动力学（kinetically non-local peridynamics）理论一致，其中式 (2.39b) 的第二式可进一步表示为

$$\mathbf{p}_{eff} = [\rho_I \mathbf{I} + (\langle \rho \rangle - \rho_I) \mathbf{A}_G] \cdot \dot{\mathbf{u}}_H + \int_{\mathbb{R}^n} (\langle \rho \rangle - \rho_I) \mathbf{G}_u(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot (\dot{\mathbf{u}}_H(\mathbf{x}', t) - \dot{\mathbf{u}}_H(\mathbf{x}, t)) dV_{\mathbf{x}'} \quad (2.40)$$

其中 $\mathbf{A}_G = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{G}_u(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV_{\mathbf{x}'}$ 。事实上，式 (2.40) 与 Dayal^[10] 的动能密度形式一致。Dayal^[10] 受高阶理论中“微惯性（micro-inertia）”项的启发，指出动能密度和应变能密度应具有同阶的空间非局部性，进而假设近场动力学的色散关系可表达为分子分母同阶的有理函数，推导出了形如 (2.40) 的表达式。与 Dayal^[10] 不同的是，本文中 (2.40) 是基于非均质材料模型得到的，其中各参数均可定量表征，式 (2.40) 直观地表明惯性非局部性来源于非均质材料各组分的密度差异。

此外，若假设基体和夹杂具有相同的密度，即 $\rho_I = \rho_M = \langle \rho \rangle =: \rho$ ，则式 (2.39b) 中的等效动量密度的空间非局部项将消失，而变为 $\mathbf{p}_{eff} = \rho \dot{\mathbf{u}}_H$ 。与此同时，等效体力中

因密度差异带来的非局部项也将消失。此时，控制方程除了等效体力外，与 Kröner^[3]理论的形式一致。如果再令式 (2.28) 定义的特征长度 l_c 趋于零，即 β 的范数趋于无穷， \mathbf{G}_u 可近似表达为 Dirac 函数，此时等效应力 $\boldsymbol{\sigma}_{eff}$ 退化为 $\boldsymbol{\sigma}_{eff} = \langle \mathbf{C} \rangle : \boldsymbol{\epsilon}_H$ ，即为经典线弹理论的本构关系。另外，也可反用该近似，将等效应力 $\boldsymbol{\sigma}_{eff}$ 中的微分项近似为积分项，即

$$\boldsymbol{\sigma}_{eff} = \int_{\mathbb{R}^n} [\langle \mathbf{C} \rangle : \boldsymbol{\epsilon}_H(\mathbf{x}', t)] \cdot \mathbf{G}_u(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV_{\mathbf{x}'} \quad (2.41)$$

即为 Eringen 理论的本构关系形式。可见，忽略等效体力的影响，在 $\rho_I = \rho_M = \langle \rho \rangle =: \rho$ 的条件下，式 (2.39) 与现有的应变积分型空间非局部理论一致：可直接退化为 Kröner^[3]理论，并可近似为 Eringen 理论。此时式 (2.39) 的空间非局部性来源于夹杂和基体的刚度不同，并且可以被定量表征。这在一定程度上解决了现有的应变积分型空间非局部理论物理机制不清楚、材料参数无法定量表征的问题。

最后，类似于文献^[99]中泰勒展开的方法，可建立该积分型理论与微分型高阶理论的关系，本文不在赘述。该关系在描述高梯度平均场（如由边界效应^[14, 100]或高梯度^[101-103]的载荷引起）情况下的复合材料平均应变和平均应力关系时具有重要应用价值。

总之，时空耦合非局部方程 (2.21) 或 (2.22) 可简化为空间非局部方程，且该简化方程可表达成现有的空间非局部弹性理论的形式。在非均质材料力学范畴内，一定程度上解释了现有非局部理论的物理机制，实现了现有非局部理论中核函数、材料参数的定量表征。根据卷积的性质，可知方程 (2.21) 或 (2.22) 及其简化方程满足伽利略变换不变性。

2.4 纤维增强复合材料模型

本节将2.2节中的理论框架运用到具体的纤维增强复合材料实例中，详细介绍各项的由来、显式表达及其物理意义，并比较与近场动力学的联系。单向纤维增强复合材料、短纤维增强复合材料和纳米管增强复合材料的整体承载能力和功能特性受控于纤维或碳纳米管的性能。因此，我们将 2.2 节中的理论框架运用到上述复合材料的典型代表单元——复合圆柱模型中。如图 2.1 所示，纤维被包裹在基体壳的中心，纤维的半径为 r_I ，复合圆柱模型的外径为 r_M ，纤维和基体均为经典各向同性线弹性材料。纤维和基体的杨氏模量分别为 E_I 和 E_M ，密度分别为 ρ_I 和 ρ_M 。边界条件为

$$\sigma_r^M|_{r=r_M} = 0, \sigma_z|_{z=\pm L} = \sigma_0(t), \tau_{rz}^M|_{r=r_M} = 0 \quad (2.42)$$

其中， σ_r 、 σ_z 和 τ_{rz} 为图2.1所示的圆柱坐标系里的各应力分量。界面条件为

$$\sigma_r^M|_{r=r_I, -L \leq z \leq L} = \sigma_r^I|_{r=r_I, -L \leq z \leq L}, \tau_{rz}^M|_{r=r_I, -L \leq z \leq L} = \tau_{rz}^I|_{r=r_I, -L \leq z \leq L} \quad (2.43)$$

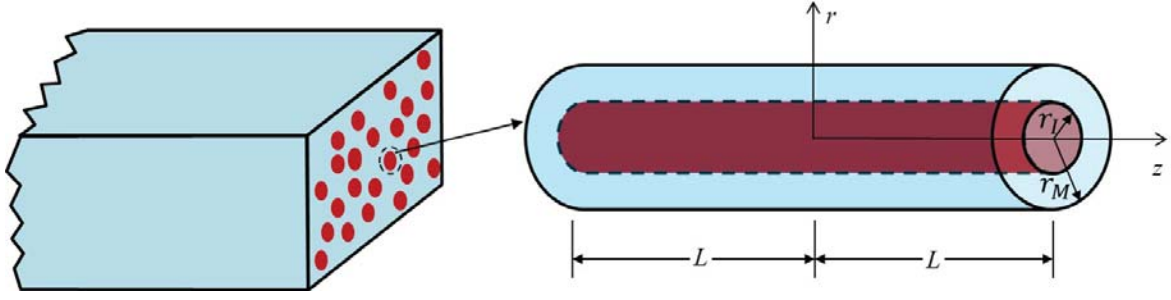


图 2.1 复合材料圆柱模型

纤维和基体均满足经典线弹性控制方程。

2.4.1 位移场分解

根据剪滞模型^[104]，可以证明复合材料圆柱模型的位移场可表达为 (2.2) 的形式，具体推导过程如下。对基体而言，将其 z 方向上的经典波动方程两边关于基体横截面 A_M 积分可得

$$\int_{A_M} \frac{\partial \sigma_z^M}{\partial z} dA + \int_{A_M} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}^M) dA = \int_{A_M} \rho_M \ddot{u}_M dA \quad (2.44)$$

其中， σ_z^M 和 u_m 分别表示 z 方向上的应力和位移。将基体横截面上的平均应力记为 $\bar{\sigma}_M$ ，由对称条件 $\tau_{rz}^M|_{r=0} = 0$ ，方程 (2.44) 可写为

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_z^M}{\partial z} = \frac{2r_I}{r_M^2 - r_I^2} \tau_i + \frac{1}{A_M} \int_{A_M} \rho_M \ddot{u}_M dA \quad (2.45)$$

其中

$$\tau_i = \tau_{rz}^M|_{r=r_M} \quad (2.46)$$

进一步假设

$$\frac{\partial \sigma_z^M}{\partial z} = g(z, t) \quad (2.47)$$

其中， $g(z, t)$ 为一未知函数。将方程 (2.47) 代入到经典波动方程，并关于 r 到 r_M 之间的面积进行积分可得

$$\tau_{rz}^M = \frac{1}{2} \left(\frac{r_M^2}{r} - r \right) g(z, t) - \frac{1}{2\pi r} \int_{A_{r_M-r}} \rho_M \ddot{u}_M dA \quad (2.48)$$

其中， A_{r_M-r} 表示半径 r 和 r_M 之间的面积。把式 (2.45) 和 (2.47) 代入到式 (2.48) 中可得

$$\tau_{rz}^M = \frac{r_I}{r_M^2 - r_I^2} \left(\frac{r_M^2}{r} - r \right) \tau_i + \frac{A_{r_M-r}}{2\pi r} \left[\frac{1}{A_M} \int_{A_M} \rho_M \ddot{u}_M dA - \frac{1}{A_{r_M-r}} \int_{A_{r_M-r}} \rho_M \ddot{u}_M dA \right] \quad (2.49)$$

假设上式中两积分项相等，由胡克定律可得

$$\frac{r_I}{r_M^2 - r_I^2} \left(\frac{r_M^2}{r} - r \right) \tau_i = \mu_M \frac{\partial u_M}{\partial r} \quad (2.50)$$

其中, μ_M 为基体的剪切模量。式 (2.50) 两边关于 r 从 r_I 到 r_M 积分可得

$$\tau_i = \mu_M \frac{r_M^2 - r_I^2}{r_I} \frac{(u_M|_{r=r_M} - u_M|_{r=r_I})}{r_M^2 \ln\left(\frac{r_M}{r_I}\right) - \frac{1}{2}(r_M^2 - r_I^2)} \quad (2.51)$$

将式 (2.51) 代入式 (2.50), 两边关于 r 从 r_I 到 r 积分可得

$$u_M(r, z, t) = u_M|_{r=r_I} + \frac{r_M^2 \ln\left(\frac{r}{r_I}\right) - \frac{1}{2}(r^2 - r_I^2)}{r_M^2 \ln\left(\frac{r_M}{r_I}\right) - \frac{1}{2}(r_M^2 - r_I^2)} (u_M|_{r=r_M} - u_M|_{r=r_I}) \quad (2.52)$$

假设纤维和基体之间为完好界面, 则 $u_M|_{r=r_I} = u_I|_{r=r_I}$ 。此外, 对纤维增强复合材料有 $E_I \gg E_M$, 那么可假设纤维的位移与 r 无关, 即 $u_I(r, z) = u_I(z)$ 。因此式 (2.52) 可写为

$$u_M(r, z, t) = u_I(z, t) + h(r)W_u(z, t) \quad (2.53)$$

其中

$$h(r) = \frac{r_M^2 \ln\left(\frac{r}{r_I}\right) - \frac{1}{2}(r^2 - r_I^2)}{r_M^2 \ln\left(\frac{r_M}{r_I}\right) - \frac{1}{2}(r_M^2 - r_I^2)}, \quad W_u(z, t) = u_M(r, z, t)|_{r=r_M} - u_I(z, t) \quad (2.54)$$

因此, 复合圆柱的位移模式可表示为 (2.3) 的形式

$$u_I(r, z, t) = u_H(z, t) - \phi_h W_u(z, t), \quad u_M(r, z, t) = u_H(z, t) + (h(r) - \phi_h) W_u(z, t) \quad (2.55)$$

其中 $\phi_h = \frac{1}{A_I + A_M} \int_{A_M} h(r) dA_M$ 。复合圆柱的位移场 (2.55) 这一实例验证了位移分解 (2.2) 的正确性。

2.4.2 宏观性能的控制方程

接下来, 根据第 2.2 节的推导过程, 复合圆柱模型的截面平均位移场的控制方程可表示为

$$\rho_M \ddot{u}_H(z, t) + \gamma_\rho \ddot{u}_H * G_u = E_M u_H''(z, t) + \gamma_E u_H'' * G_u + b(z, t) \quad (2.56)$$

其中上标'代表关于 z 的偏导数; $\gamma_\rho = \langle \rho \rangle - \rho_M$, $\gamma_E = \langle E \rangle - E_M$, $G_u = \mu_M \beta_h^2 g_u / E_I$ 其中 β_h 和 g_u 取决于纤维的运动方程

$$A_I E_I u_I''(z, t) + 2\pi r_I \mu_M h'(r_I) W_u(z, t) = A_I \rho_I \ddot{u}_I(z, t) \quad (2.57)$$

将式 (2.55) 第一式代入上式, 消去 u_I , 可将式 (2.57) 表达为一个关于 $W_u(z)$ 的二阶偏微分方程

$$\frac{1}{c_I^2} \ddot{W}_u(z, t) - W_u''(z, t) + \frac{\mu_M \beta_h^2}{E_I} W_u(z, t) = \frac{1}{\phi_h} \left(\frac{1}{c_I^2} \ddot{u}_H - u_H'' \right) \quad (2.58)$$

其中, $c_I = \sqrt{E_I/\rho_I}$ 且

$$\beta_h = \sqrt{\frac{2\pi r_I h'(r_I)}{\phi_h A_I}} \quad (2.59)$$

则式 (2.58) 的格林函数 g_u 为

$$g_u(z, t) = \frac{\ell_u}{2t_u} J_0 \left(\sqrt{\left(\frac{t^2}{t_u^2} - \frac{z^2}{\ell_u^2} \right)} \right), \quad \left| \frac{z}{\ell_u} \right| < \left| \frac{t}{t_u} \right| \quad (2.60)$$

其中 $\ell_u = \sqrt{E_I/(\mu_M \beta_h^2)}$; $t_u = \ell_u/c_I$ 。至此, β_h 和 g_u 可由式 (2.59) 和 (2.60) 的定量表征唯一确定, 控制方程 (2.56) 是一个显式的可定量表征的表达式。在控制方程 (2.56) 的推导过程中, 除了剪滞模型的假设外, 并未引入额外的假设。因此控制方程 (2.56) 中的时空耦合非局部性在非均质材料均匀化过程中自然出现, 当非均质性消失时, 时空耦合非局部项随之消失, 即时空耦合非局部性是微观非均质的宏观体现。

2.4.3 与现有非局部理论的关系

若在推导过程中忽略纤维的惯性力, 控制方程 (2.56) 同样可简化为空间非局部方程, 其中平均应力和动量密度可表示为

$$\sigma_{eff} = \langle E \rangle u'_H(z, t) + \gamma_E \beta_u^2 \int_{-\infty}^{+\infty} g_u(z-z_0) (u'_H(z_0, t_0) - u'_H(z, t)) dz_0 \quad (2.61a)$$

$$p_{eff} = \langle \rho \rangle \dot{u}_H(z, t) + \gamma_\rho \beta_u^2 \int_{-\infty}^{+\infty} g_u(z-z_0) (\dot{u}_H(z_0, t_0) - \dot{u}_H(z, t)) dz_0 \quad (2.61b)$$

其中 $\beta_u = 1/\ell_u$, $g_u(z-z_0) = \frac{1}{2\beta_u} e^{-\beta_u |z-z_0|}$ 。毫无意外的, 表达式 (2.61a) 与一维 Kröner 理论^[3]一致, 同样可改写为一维 Eringen 理论^[4]的形式。等效动量密度 (2.61b) 与动力非局部近场动力学^[10]一致。

利用 Silling^[14] 文献中的近似方法 $\delta(z) \approx \zeta^2 g_\zeta(z)$ 其中 $g_\zeta(z) = \frac{1}{2\zeta} e^{-\zeta |z|}$, 控制方程 (2.61b) 可近似表达为

$$\begin{aligned} & \langle \rho \rangle \ddot{u}_H(z, t) + \gamma_\rho \beta_u^2 \int_{-\infty}^{+\infty} g_u(z-z_0) (\ddot{u}_H(z_0, t_0) - \ddot{u}_H(z, t)) dz_0 \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} [\gamma_E \beta_u^4 g_u + E_M \zeta^4 g_\zeta] [u_H(z_0, t_0) - u_H(z, t)] dz_0 + b(z, t) \end{aligned} \quad (2.62)$$

上式恰好是动力非局部近场动力学^[10]的控制方程。特别地, 当 $\rho_I = \rho_m = \rho$, 方程 (2.62) 可简化为近场动力学^[6]的控制方程

$$\rho \ddot{u}_H(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\gamma_E \beta_u^4 g_u + E_M \zeta^4 g_\zeta] [u_H(z_0, t_0) - u_H(z, t)] dz_0 + b(z, t) \quad (2.63)$$

另外, 引入近似 $\delta(z)\delta(t) \approx G_\zeta$, G_ζ 与 (2.56) 中的 G_u 形式相同, 令 G_u 中的 $\beta_h = \zeta$ 即可得到 G_ζ 。利用近似 $\delta(z)\delta(t) \approx G_\zeta$ 消去时空耦合非局部方程 (2.56) 中的时间和空间

微分项，将其近似表达为

$$\int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} [\gamma_\rho \ddot{G}_u + \rho_M \ddot{G}_\zeta] u_H(z_0, t_0) dz_0 dt_0 = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} [\gamma_E G''_u + E_M G''_\zeta] u_H(z_0, t_0) dz_0 dt_0 + b(z, t) \quad (2.64)$$

仿照 Dayal 文章^[10]中的命名方式，我们称上式为时空耦合非局部近场动力学（spatiotemporal nonlocal peridynamics, STPD）方程。尽管在过去的十几年中，PD 和“PD 材料”的概念被广泛应用于众多领域，但是“PD 材料”是如何产生的仍是个谜，本章的推导清楚地说明了“PD 材料”可看作是复合材料均匀化的等效材料，且根据均匀化过程中假设的不同，“PD 材料”可表现为经典的“PD 材料”、动力非局部“PD 材料”、时空非局部“PD 材料”等不同的材料特性。

2.5 色散关系

色散关系作为非均质材料重要的动态特性之一，也是考量动态模型的标准之一。为此本节将分析第 2.2 节得到的方程 (2.21) 及其简化、近似形式的色散关系。

2.5.1 时空耦合非局部形式的色散关系

基于 Mindlin 的位移假设，考察本文提出的时空耦合非局部方程 (2.21) 的色散关系。为此令方程 (2.21) 中， $\mathbf{G}_u = \beta \cdot \mathbf{g}_u$ ，并将平面波位移形式 $\mathbf{u}_H(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \pm \omega(\mathbf{k})t)}$ 代入方程 (2.21) 可得

$$\left| (\mathbf{Q} - \langle \rho \rangle \omega^2 \mathbf{I}) + (\mathbf{Q}_I - \rho_I \omega^2 \mathbf{I}) \cdot (\mathbf{Q}_M - \rho_M \omega^2 \mathbf{I}) \cdot \beta^{-1} \right| = 0 \quad (2.65)$$

其中 \mathbf{U}_0 为常向量； \mathbf{k} 为波数向量，其方向代表了波传播的方向； ω 为角频率； \mathbf{Q} 、 \mathbf{Q}_I 和 \mathbf{Q}_M 为关于波数 \mathbf{k} 的二阶张量，同式 (2.30) 中的形式。可见上式是关于波数 \mathbf{k} 和角频率 ω 的隐式方程，色散关系可由上式求得。由式 (2.27) 知， β 与位移模式假设中的二阶张量 \mathbf{H} 相关。对于各向异性材料而言， \mathbf{H} 的形式较为复杂，为了能解析的求出色散关系的显式表达式，本文仍以各向同性线弹性材料为例，假设 $\mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}) = h(\boldsymbol{\xi})\mathbf{I}$ ，则方程 (2.65) 变为

$$\left| (\mathbf{Q} - \langle \rho \rangle \omega^2 \mathbf{I}) + \frac{\ell_c^2}{\lambda_M + 2\mu_M} (\mathbf{Q}_I - \rho_I \omega^2 \mathbf{I})(\mathbf{Q}_M - \rho_M \omega^2 \mathbf{I}) \right| = 0 \quad (2.66)$$

其中

$$\mathbf{Q}_M(\mathbf{k}) = Q_{\parallel}^M \mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k + Q_{\perp}^M \mathbf{P}_{\mathbf{n}_k} = (\lambda_M + 2\mu_M)k^2 \mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k + \mu_M k^2 \mathbf{P}_{\mathbf{n}_k} \quad (2.67a)$$

$$\mathbf{Q}_I(\mathbf{k}) = Q_{\parallel}^I \mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k + Q_{\perp}^I \mathbf{P}_{\mathbf{n}_k} = (\lambda_I + 2\mu_I)k^2 \mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k + \mu_I k^2 \mathbf{P}_{\mathbf{n}_k} \quad (2.67b)$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{k}) = Q_{\parallel} \mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k + Q_{\perp} \mathbf{P}_{\mathbf{n}_k} = (\langle \lambda \rangle + 2\langle \mu \rangle)k^2 \mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k + \langle \mu \rangle k^2 \mathbf{P}_{\mathbf{n}_k} \quad (2.67c)$$

式中, $k = |\mathbf{k}|$; $\mathbf{n}_k = \mathbf{k}/k$; $\mathbf{P}_{n_k} = \mathbf{I} - \mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k$ 。 λ 和 μ 为 Lamé 常数。式 (2.66) 可表示为特征值问题

$$|\Xi - \Lambda \mathbf{I}| = -(\Lambda - \Xi_{\parallel})(\Lambda - \Xi_{\perp})^2 = 0 \quad (2.68)$$

其中, $\Lambda = \langle \rho \rangle \omega^2 - \frac{\rho_I \rho_M \ell_c^2}{\lambda_M + 2\mu_M} \omega^4$; 二阶张量 $\Xi = \Xi_{\parallel} \mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k + \Xi_{\perp} \mathbf{P}_{n_k}$ 其中

$$\Xi_{\parallel} = Q_{\parallel} + \frac{\ell_c^2}{(\lambda_M + 2\mu_M)} (Q_{\parallel}^I Q_{\parallel}^M - \rho_M Q_{\parallel}^I \omega^2 - \rho_I Q_{\parallel}^M \omega^2) \quad (2.69a)$$

$$\Xi_{\perp} = Q_{\perp} + \frac{\ell_c^2}{(\lambda_M + 2\mu_M)} (Q_{\perp}^I Q_{\perp}^M - \rho_M Q_{\perp}^I \omega^2 - \rho_I Q_{\perp}^M \omega^2) \quad (2.69b)$$

式 (2.68) 表明张量 Ξ 的特征值包含一个单根 $\Lambda = \Xi_{\parallel}$ 和一个二重根 $\Lambda = \Xi_{\perp}$ 。注意到 Λ 含有四次项 ω^4 , 意味着每个根的色散关系分别有两个分支, 即色散关系共包含了四个分支。而经典方程中特征值同样有一个单根和一个重根, 但每个根仅仅对应一个分支, 共两个分支。可见两者的色散关系存在极大的不同, 具体分析如下。

首先对于单根 $\Lambda = \Xi_{\parallel}$, 其特征向量平行于波数 \mathbf{k} 的单位向量, 也就是说位移向量与波传播的方向相同, 此时的波称为纵波或压力波 (P 波)。此时纵波色散关系 ω_L^{\pm} 的方程为

$$\omega_L^4 - \left[(c_{pI}^2 + c_{pM}^2) k^2 + c_{pM}^2 \frac{\langle \rho \rangle}{\rho_I \ell_c^2} \right] \omega_L^2 + c_{pI}^2 c_{pM}^2 k^4 + c_{pM}^2 \frac{\langle \lambda \rangle + 2\langle \mu \rangle}{\rho_I \ell_c^2} k^2 = 0 \quad (2.70)$$

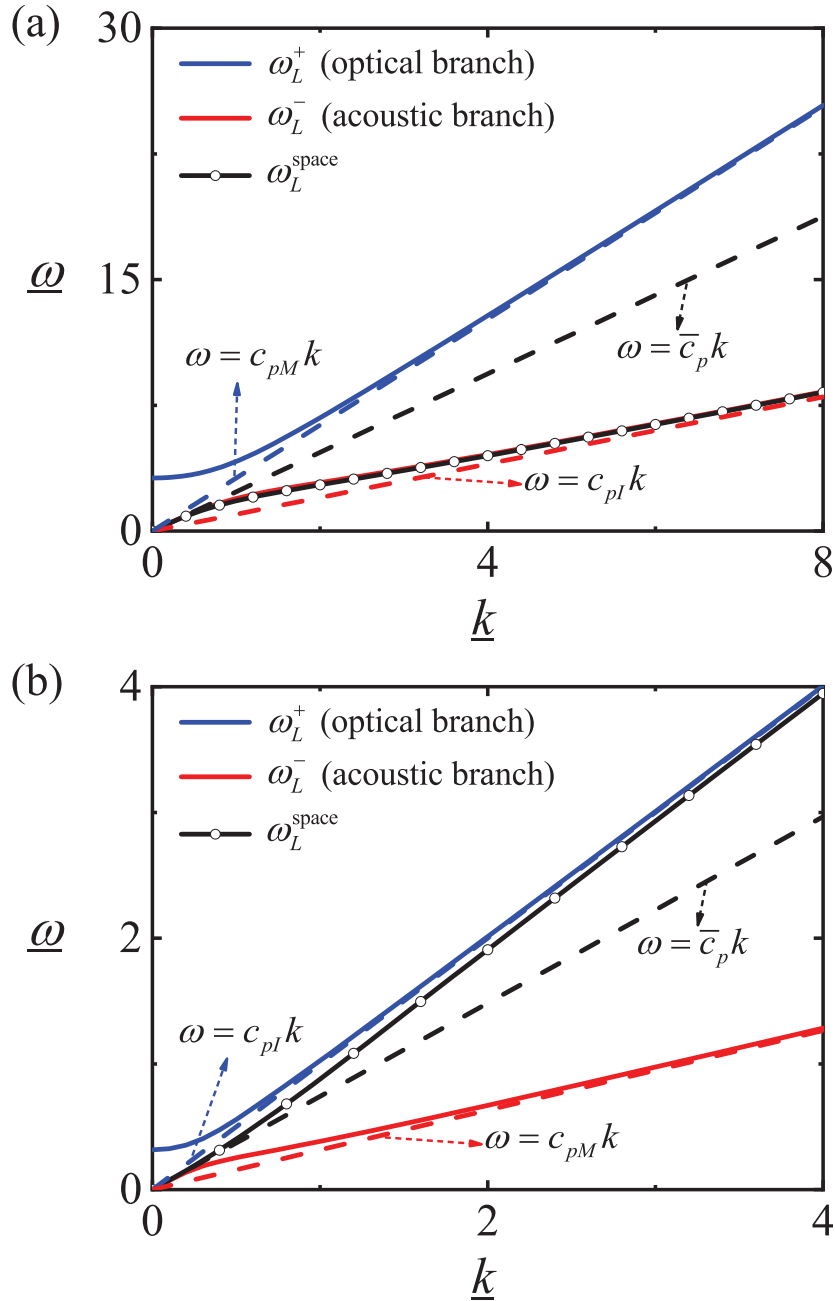
其中, $c_{pI} = \sqrt{(\lambda_I + 2\mu_I)/\rho_I}$ 和 $c_{pM} = \sqrt{(\lambda_M + 2\mu_M)/\rho_M}$ 分别为夹杂和基体的纵波波速。其次, 重根 $\Lambda = \Xi_{\perp}$ 的特征向量垂直于 \mathbf{n}_k , 此时的波称为横波或剪切波 (S 波)。横波色散关系 ω_T^{\pm} 的方程为

$$\omega_T^4 - \left[(c_{sI}^2 + c_{sM}^2) k^2 + c_{pM}^2 \frac{\langle \rho \rangle}{\rho_I \ell_c^2} \right] \omega_T^2 + c_{sI}^2 c_{sM}^2 k^4 + c_{pM}^2 \frac{\langle \mu \rangle}{\rho_I \ell_c^2} k^2 = 0 \quad (2.71)$$

其中, $c_{sI} = \sqrt{\mu_I/\rho_I}$ 和 $c_{sM} = \sqrt{\mu_M/\rho_M}$ 分别为夹杂和基体的横波波速。此外, 引入无量纲的波数和角频率 $\underline{k} = \ell_c k$, $\underline{\omega} = t_c \omega$, 其中特征时间 $t_c = \ell_c/c_{pI}$ 。令 $V_I = V_M$ 和 $\rho_I = \rho_M$, 当基体和夹杂的 Lamé 常数比取不同值时, 纵波和横波的色散关系如图 2.2 和图 2.3 所示。其中图 2.2(a) 和图 2.3(a) 中基体的 Lamé 常数大于纤维的, 表示“软夹杂”的情况; 图 2.2(b) 和图 2.3(b) 中纤维的 Lamé 常数大于基体的, 表示“硬夹杂”的情况。

由图 2.2 和图 2.3 可知, 纵波和横波的色散关系具有相同的特征, 均包含了上下两支, 其中上面的一支为光学支, 下面的一支为声学支。在长波极限 $\underline{k} = 0$ 处, 纵波和横波的色散关系的光学支 ω_L^+ 和 ω_T^+ 均有截止频率: $\underline{\omega}_L^c = \underline{\omega}_T^c = \sqrt{(\langle \rho \rangle c_{pM}^2)/(\rho_M c_{pI}^2)}$, 且此时的群速度为零; 纵波和横波色散关系的声学支 ω_L^- 和 ω_T^- 分别与经典方程给出的色散关系 $\omega = \bar{c}_p k$ 和 $\omega = \bar{c}_s k$ 相切, 其中 $\bar{c}_p = \sqrt{(\langle \lambda \rangle + 2\langle \mu \rangle)/\langle \rho \rangle}$ 和 $\bar{c}_s = \sqrt{\langle \mu \rangle/\langle \rho \rangle}$ 。

在短波极限处 $\underline{k} \gg 1$, 在“软夹杂”和“硬夹杂”两种情况下, 色散关系分别有如下特征。首先, 对于“软夹杂”情况, 即图 2.2(a) 和图 2.3(a), 可观察到光学支 ω_L^+


 图 2.2 纵波的色散关系: (a) $\mu_I/\mu_M = \lambda_I/\lambda_M = 0.1$; (b) $\mu_I/\mu_M = \lambda_I/\lambda_M = 10$

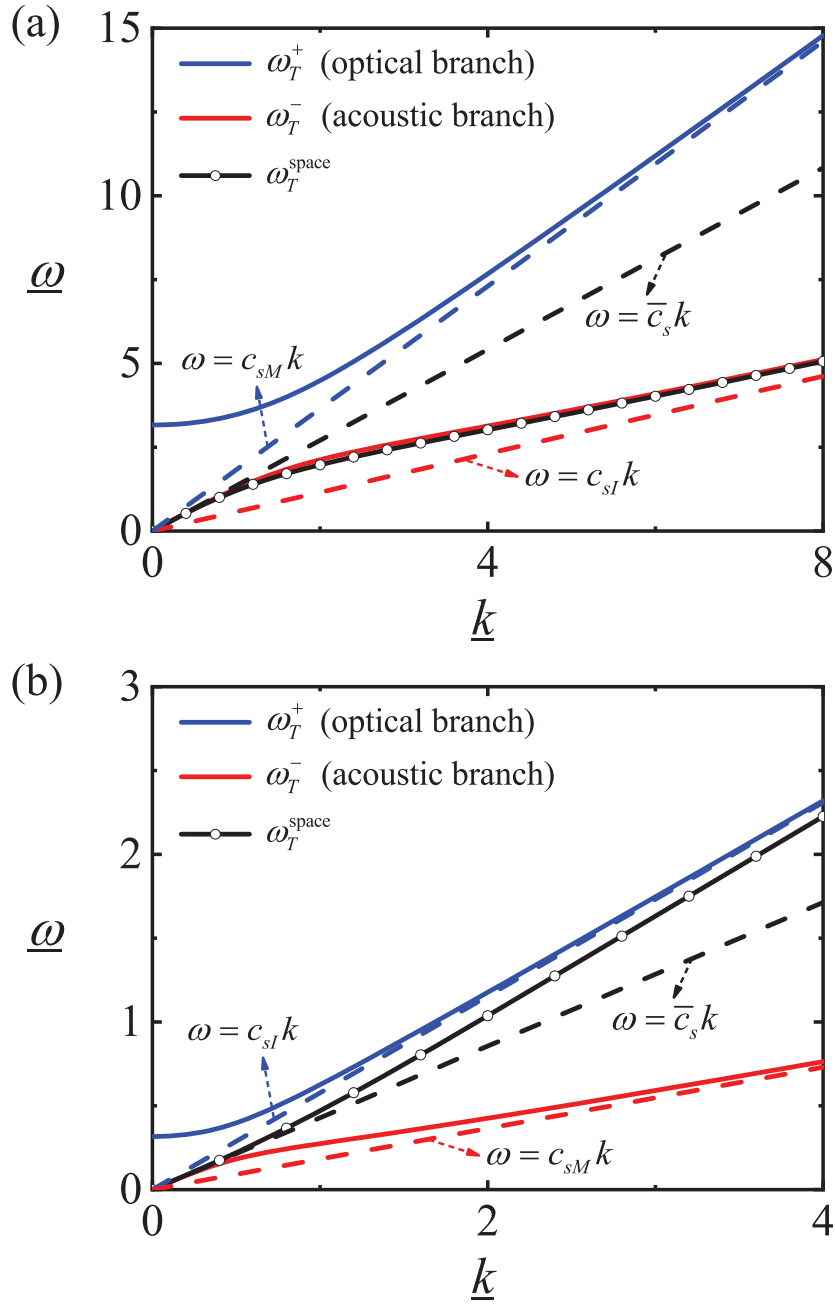


图 2.3 横波的色散关系: (a) $\mu_I/\mu_M = \lambda_I/\lambda_M = 0.1$; (b) $\mu_I/\mu_M = \lambda_I/\lambda_M = 10$

和 ω_T^+ 分别趋向于基体的纵波和横波色散关系 $\omega = c_{pM}k$ 和 $\omega = c_{sM}k$ ，而声学支 ω_L^- 和 ω_T^- 分别趋向于夹杂的纵波和横波色散关系 $\omega = c_{pI}k$ 和 $\omega = c_{sI}k$ 。其次，对于“硬夹杂”情况，即图 2.2(b) 和图 2.3(b)，可观察到光学支 ω_L^+ 和 ω_T^+ 分别趋向于夹杂的纵波和横波色散关系 $\omega = c_{pI}k$ 和 $\omega = c_{sI}k$ ，而声学支 ω_L^- 和 ω_T^- 分别趋向于基体的纵波和横波色散关系 $\omega = c_{pM}k$ 和 $\omega = c_{sM}k$ 。由上述现象可知，在短波极限处 $k \gg 1$ ，光学支总是趋向于相应波速较大的组份材料的色散关系，而声学支总是趋向于相应波度较小的组份材料的色散关系。

色散关系的以上特征与 Engelbrecht^[98] 分析的一维 Mindlin 方程的色散关系一致。事实上，方程 (2.70) 和 (2.71) 可表示为统一形式

$$\omega^2 = \bar{c}_e^2 k^2 + t_e^2 (\omega^2 - c_{eI}^2 k^2) (\omega^2 - c_{eM}^2 k^2) \quad (2.72)$$

其中， $t_e^2 = \rho_I t_c^2 / \langle \rho \rangle$ ； ω 代表 ω_L 或 ω_T 。若 ω 为 ω_L ，有 $\bar{c}_e = \bar{c}_p$ ， $c_{eI} = c_{pI}$ 和 $c_{eM} = c_{pM}$ 。若 ω 为 ω_T ，有 $\bar{c}_e = \bar{c}_s$ ， $c_{eI} = c_{sI}$ 和 $c_{eM} = c_{sM}$ 。除了参数 \bar{c}_e^2 和 t_e^2 的取值不同以外，方程 (2.72) 与 Engelbrecht 文献^[98] 中的色散关系具有相同的形式。

2.5.2 简化及近似形式的色散关系

按照上述方法，由方程 (2.21) 简化而来的方程 (2.39) 的纵波和横波的色散关系可求解为

$$\omega_L^{space} = k \sqrt{\frac{c_{pI}^2 \rho_I \ell_c^2 k^2 + \langle \lambda \rangle + 2 \langle \mu \rangle}{\rho_I \ell_c^2 k^2 + \langle \rho \rangle}}, \quad \omega_T^{space} = k \sqrt{\frac{c_{sM}^2 c_{sI}^2 \rho_I \ell_c^2 k^2 / c_{pM}^2 + \langle \mu \rangle}{c_{sM}^2 \rho_I \ell_c^2 k^2 / c_{pM}^2 + \langle \rho \rangle}} \quad (2.73)$$

如果 $\rho_I = \rho_M$ ，上式也是 Kröner 理论^[3] 的色散关系。令 $V_I = V_M$ 和 $\rho_I = \rho_M$ ，当基体和夹杂的 Lamé 常数比取不同值时，纵波和横波的色散关系 ω_L^{space} 和 ω_T^{space} 如图 2.2 和图 2.3 所示。与时空耦合非局部方程 (2.21) 相比，简化而来的空间非局部 (2.39) 只有声学支。在长波极限 $k = 0$ 处， ω_L^{space} 和 ω_T^{space} 分别与经典方程给出的色散关系 $\omega = \bar{c}_p k$ 和 $\omega = \bar{c}_s k$ 相切。而在短波极限处 $k \gg 1$ ， ω_L^{space} （或 ω_T^{space} ）在“软夹杂”和“硬夹杂”两种情况下，总是趋近于夹杂的纵波（或横波）的色散关系。这是由方程 (2.39) 的推导过程中忽略了基体的惯性项造成的。

接下来，我们进一步比较时空耦合非局部 PD (STPD) (2.64)、动力非局部 PD (KPD) (2.62)、和 PD (2.63) 的色散关系。STPD (2.64) 的色散关系有声学支和光学支，记作 ω_{STPD}^\pm ，并可表示为式 (2.72)，其中 c_{eI} ， \bar{c}_e ， c_{eM} 和 t_e 分别替换为 c_I ， $\bar{c} = \sqrt{\langle E \rangle / \langle \rho \rangle}$ 和

$$c_{AM} = \sqrt{\frac{\bar{E} + (\zeta^2 / \beta_u^2 - 1) E_M}{\langle \rho \rangle + (\zeta^2 / \beta_u^2 - 1) \rho_M}}, \quad t_{Ac} = \sqrt{\frac{\langle \rho \rangle + (\zeta^2 / \beta_u^2 - 1) \rho_M}{\langle \rho \rangle}} t_0 \quad (2.74)$$

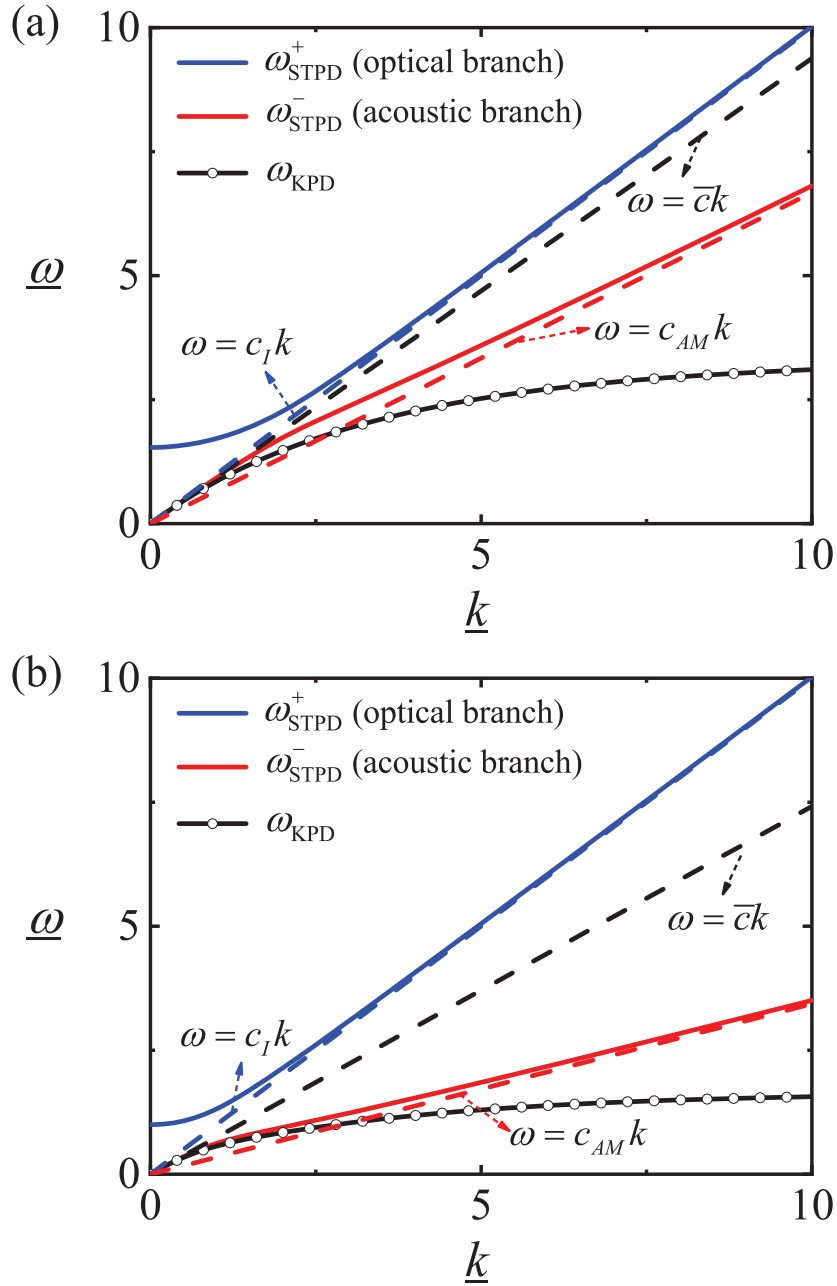


图 2.4 近似积分方程的色散关系: (a) $\zeta/\beta_u = 5$, $\rho_I/\rho_M = 4$; (b) $\zeta/\beta_u = 5$, $\rho_I/\rho_M = 1$

KPD (2.62) 的色散关系为

$$\omega_{\text{KPD}} = \sqrt{\frac{k^2}{\rho_M k^2 + \langle \rho \rangle \beta_u^2} \left(\gamma_E \beta_u^2 + \frac{E_M \zeta^2 (k^2 + \beta_u^2)}{k^2 + \zeta^2} \right)} \quad (2.75)$$

如果令上式 $\rho_I = \rho_M$ 则可得到 PD (2.63) 的色散关系 ω_{PD} 。

令 $\underline{k} = \ell_u k$ 和 $\underline{\omega} = t_u \omega$ ，各色散关系如图 2.4 所示。可知 STPD 的色散关系与方程 (2.56) 具有相同的特征，在短波极限 $k \rightarrow +\infty$ 处两支的群速度分别趋近于常数 c_I 和 c_{AM} 。然而，KPD 和 PD 的色散关系仅有声学支且该声学支并未保留方程 (2.56) 色散关系的声学支的特征，在短波极限 $k \rightarrow +\infty$ 处，两者的群速度均趋于零，即

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \omega_{\text{STPD}}^+ = c_I k, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \omega_{\text{STPD}}^- = c_{AM} k, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \omega_{\text{KPD}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \omega_{\text{PD}} = \sqrt{(\gamma_E \beta_u^2 + E_M \zeta^2) / \rho_M} \quad (2.76)$$

也就是除非 $\zeta^2 / \beta_u^2 \rightarrow +\infty$ ， ω_{KPD} 和 ω_{PD} 将趋于一个有限常数，且群速度为零。该现象与已有的 PD 相关文献报道 [6, 56, 105] 的一致。

综上所述，由积分-微分形式的方程 (2.56) 和其近似积分形式 (2.64) (STPD) 所表示的时空耦合非局部理论，均给出了类似于 Mindlin 方程的同时包含声学支和光学支的色散关系，且两支色散关系在短波极限处群速度均为非零常数。当忽略微结构的惯性项时，方程 (2.56) 退化为微分-积分型的空间非局部方程 (2.61)，其色散关系有声学支，且其特性与方程 (2.56) 的声学支相同，在短波极限处群速度为非零常数。然而，当方程 (2.61) 进一步近似为积分方程 (2.62) 时，声学支的特征也随之发生改变，在短波极限处群速度趋于零。

2.6 动态算例

正如上一节所讨论的，时空耦合非局部方程 (2.21) 的色散关系由光学支和声学支组成。接下来以无限大体初值问题为例，定量地说明其对动态瞬时响应的影响。其中初始位移和初始速度分别为 $\mathbf{u}_H(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{U}_0 \cos(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x})$ 和 $\dot{\mathbf{u}}_H(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$ 。不考虑体力的影响，时空耦合非局部方程 (2.21) 的解析解可表示为

$$\mathbf{u}_H(\mathbf{x}, t) = \Phi \cdot \mathbf{U}_0 \cos(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x}) \quad (2.77)$$

其中， $\Phi = \Phi_{\parallel} \mathbf{n}_{\mathbf{k}_0} \otimes \mathbf{n}_{\mathbf{k}_0} + \Phi_{\perp} \mathbf{P}_{\mathbf{n}_{\mathbf{k}_0}}$ ，分量 Φ_{\parallel} 和 Φ_{\perp} 分别为

$$\Phi_{\parallel} = \frac{\omega_{Lo}^2 - c_{pM}^2 k_0^2}{\omega_{Lo}^2 - \omega_{La}^2} \cos(\omega_{La} t) - \frac{\omega_{La}^2 - c_{pM}^2 k_0^2}{\omega_{Lo}^2 - \omega_{La}^2} \cos(\omega_{Lo} t) \quad (2.78a)$$

$$\Phi_{\perp} = \frac{\omega_{To}^2 - c_{sM}^2 k_0^2}{\omega_{To}^2 - \omega_{Ta}^2} \cos(\omega_{Ta} t) - \frac{\omega_{Ta}^2 - c_{sM}^2 k_0^2}{\omega_{To}^2 - \omega_{Ta}^2} \cos(\omega_{To} t) \quad (2.78b)$$

其中， $k_0 = |\mathbf{k}_0|$ ， $\omega_{Lo} = \omega_L^+(k_0)$ ， $\omega_{La} = \omega_L^-(k_0)$ ， $\omega_{To} = \omega_T^+(k_0)$ ， $\omega_{Ta} = \omega_T^-(k_0)$ ， $\mathbf{n}_{\mathbf{k}_0} = \mathbf{k}_0 / k_0$ ， $\mathbf{P}_{\mathbf{n}_{\mathbf{k}_0}} = \mathbf{I} - \mathbf{n}_{\mathbf{k}_0} \otimes \mathbf{n}_{\mathbf{k}_0}$ 。针对同样的初值问题，Mindlin 方程 (2.35) 的解析解仍可表示为

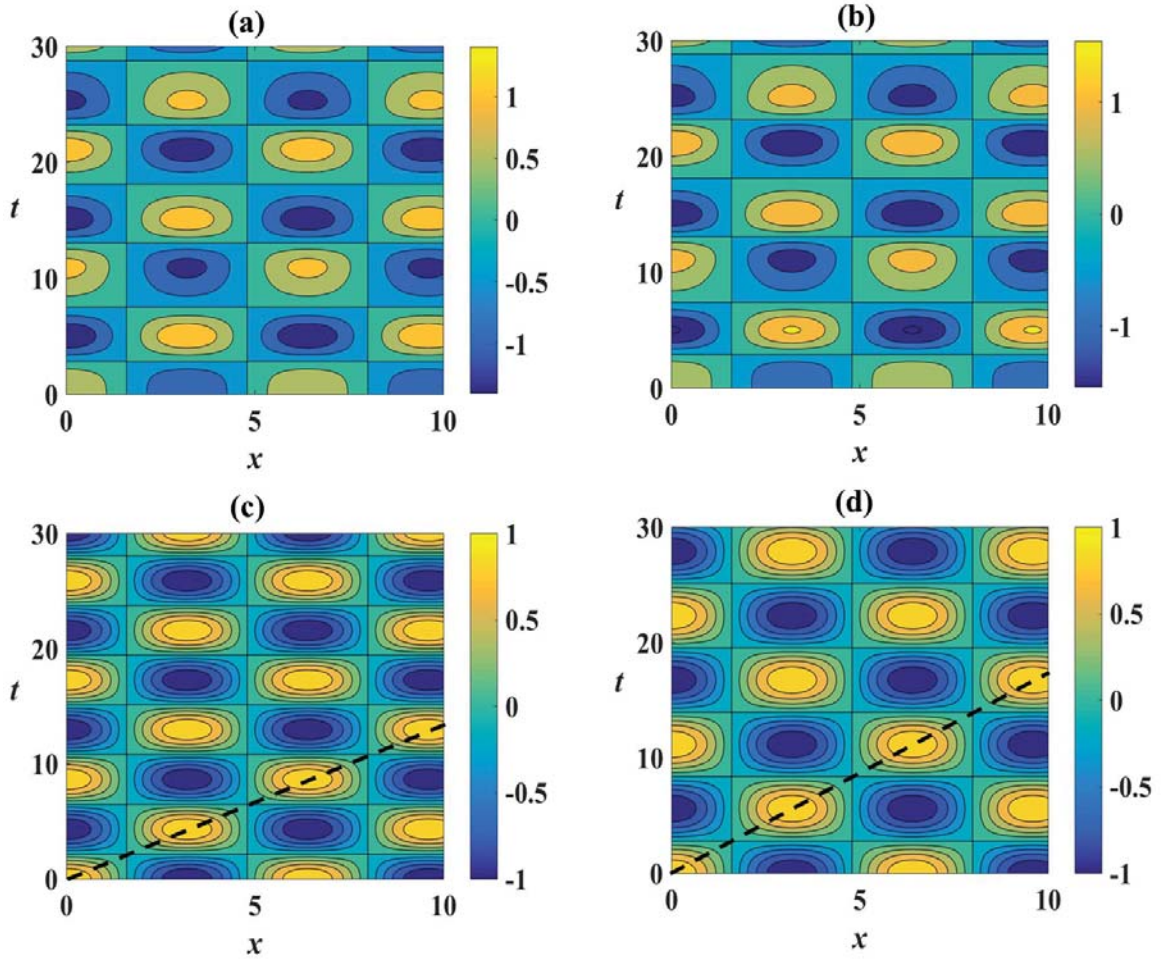


图 2.5 不同方程的位移响应: (a) 时空耦合非局部方程 (2.21); (b) Mindlin 方程 (2.35); (c) 经典方程; (d) 空间非局部方程 (2.39)

(2.77) 其中 Φ_{\parallel} 和 Φ_{\perp} 分别替换为

$$\Phi_{\parallel} = \frac{\omega_{Lo}^2}{\omega_{Lo}^2 - \omega_{La}^2} \cos(\omega_{La}t) - \frac{\omega_{La}^2}{\omega_{Lo}^2 - \omega_{La}^2} \cos(\omega_{Lot}) \quad (2.79a)$$

$$\Phi_{\perp} = \frac{\omega_{To}^2}{\omega_{To}^2 - \omega_{Ta}^2} \cos(\omega_{Ta}t) - \frac{\omega_{Ta}^2}{\omega_{To}^2 - \omega_{Ta}^2} \cos(\omega_{Tot}) \quad (2.79b)$$

式 (2.78) 和式 (2.79) 说明, 尽管方程 (2.21) 和 Mindlin 方程 (2.35) 的色散关系相同, 但其解析解不同。

同时, 对此初值问题, 经典方程、空间非局部方程 (2.39) 和 Eringen 方程的解析解同样可表示为 (2.77) 的形式, 此时分量 Φ_{\parallel} 和 Φ_{\perp} 需要替换为

$$\Phi_{\parallel} = \cos(\omega_L(k_0)t), \quad \Phi_{\perp} = \cos(\omega_T(k_0)t) \quad (2.80)$$

其中 $\omega_L(k_0)$ 和 $\omega_T(k_0)$ 由各理论的色散关系确定。

以上不同理论的解析解表明, 无论是局部、空间非局部还是时空耦合非局部理论, 它们的位移的空间分布相同, 具有相等的波长 $2\pi/k_0$; 而时间相关张量 Φ 不同, 依赖

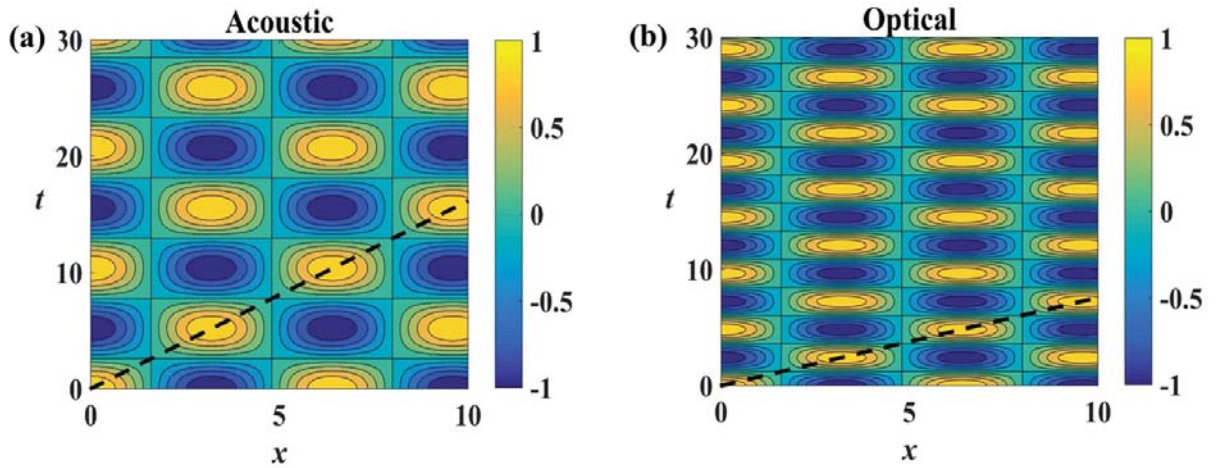


图 2.6 时空耦合非局部方程 (2.21) 和 Mindlin 方程 (2.35) 的位移分量: (a) 声学支; (b) 光学支。

于各自的色散关系。但分量 Φ_{\parallel} 和 Φ_{\perp} 具有类似的形式, 意味着它们的时间相关张量应该有类似的特征。为此, 以纵向分量 Φ_{\parallel} 为例, 令 $\rho_I/\rho_M = 4$ 、 $\lambda_I/\lambda_M = \mu_I/\mu_M = 10$ 和 $V_I = V_M$, 沿波传播方向的位移如图 2.5 所示, 其中 x 表示波传播方向上的坐标。 x 和 t 分别用 l_c 和 t_c 进行了无量纲化。

由图 2.5 可知, 不同方程的波长 (沿 x 方向的周期) 相等, 即有相同的空间分布; 连接图中波谷 (或波峰) 的线 (如图中虚线) 为波传播的特征线, 其斜率等于 $1/v_p$, 其中 v_p 为相速度。正的斜率表明波由左至右传播, 反之, 负的斜率代表波由右至左传播, 这里仅考虑前者, 如图中虚线所示。图 2.5(c) 和图 2.5(d) 的特征线分别有一个唯一的斜率, 也就是波将按照唯一的相速度传播。然而, 图 2.5(a) 和图 2.5(b) 中的特征线却呈现出了非线性, 这是由光学支和声学支叠加造成的, 即可由图 2.6(a) 和图 2.6(b) 所示的两不同频率的波叠加得到, 其中前者为声学支的响应, 后者为光学支的响应, 其特征线斜率分别为 k/ω_{La} 和 k/ω_{Lo} ; 由于 $\omega_{Lo} > \omega_{La}$, 图 2.6(b) 的斜率明显小于图 2.6(a)。也就是说, 任一波长的激励产生的响应均是由两不同频率叠加而成, 这是时空耦合非局部理论的重要特点之一。最后需要指出的是, 上述分析方法很容易推广到其他傅里叶级数表示的初值问题中。

2.7 非局部理论的变换不变性

Milton 等^[18] 已经证明, 经典线弹性方程在一般的坐标变换下不具有形式不变性。但是, 由经典线弹性方程变换后得到的微分 Willis 方程满足不变性。然而, 却鲜有文献研究其它非局部理论方程是否具有形式不变性, 满足形式不变性是相对性原理^[23] 对物理方程的基本要求之一, 且探讨非局部方程的变换不变性有望对超材料的设计提供一种新途径。为此, 本节将探讨现有非局部理论的控制方程 (包括本章推得的非局部方程) 是否满足变换不变性。

2.7.1 微分型非局部理论

我们首先考虑 Milton^[18] 附录 B 给出的一类作用于移场 \mathbf{u} 的微分算子 $\mathcal{C}_{\mathbf{C},\mathbf{S},\mathbf{D},\mathbf{B}}$:

$$\mathbf{u} \mapsto -\nabla \cdot [\mathbf{C}(\mathbf{x}) : \nabla^s \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{S}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] + \mathbf{D}(\mathbf{x}) : \nabla^s \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (2.81)$$

其中 \mathbf{C} 为四阶有界张量, \mathbf{S} 和 \mathbf{D} 为三阶有界张量, \mathbf{B} 为二阶有界张量。同时, 考虑如下坐标变换

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(\mathbf{x}) \quad \mathbf{u}'(\mathbf{x}') = (\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad \text{其中} \quad A_{ij} := \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \quad (2.82)$$

这里 $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}'(\mathbf{x})$ 是有界开集 Ω 到有界开集 Ω' 的一个二阶连续微分同胚映射。在坐标变换 (2.82) 下, 式 (2.81) 中的算子的映射为

$$\mathbf{u}' \mapsto -\nabla' \cdot [\mathbf{C}'(\mathbf{x}') : \nabla'^s \mathbf{u}'(\mathbf{x}', t) + \mathbf{S}'(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{u}'(\mathbf{x}', t)] + \mathbf{D}'(\mathbf{x}') : \nabla'^s \mathbf{u}'(\mathbf{x}', t) + \mathbf{B}'(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{u}'(\mathbf{x}', t) \quad (2.83)$$

其中, $\mathbf{C}', \mathbf{S}', \mathbf{D}', \mathbf{B}'$ 可由 $\mathbf{C}, \mathbf{S}, \mathbf{D}, \mathbf{B}$ 分别表示为

$$\begin{aligned} C'_{pqrs}(\mathbf{x}') &:= a^{-1} A_{pi} A_{qj} A_{rk} A_{sl} C_{ijkl} \\ S'_{pqr}(\mathbf{x}') &:= \frac{1}{2} a^{-1} A_{pi} A_{qj} (A_{rk,l} + A_{rl,k}) C_{ijkl} + a^{-1} A_{pi} A_{qj} A_{rk} S_{ijk} \\ D'_{pqr}(\mathbf{x}') &:= a^{-1} A_{pi,j} A_{qk} A_{rl} C_{ijkl} + a^{-1} A_{pi} A_{qj} A_{rk} D_{ijk} \\ B'_{pq}(\mathbf{x}') &:= \frac{1}{2} a^{-1} (A_{pi,j} + A_{pj,i}) A_{qk,l} C_{ijkl} + a^{-1} A_{pi,j} A_{qk} S_{ijk} \\ &\quad + \frac{1}{2} a^{-1} A_{pi} (A_{qj,k} + A_{qk,j}) D_{ijk} + a^{-1} A_{pi} A_{qj} B_{ij} \end{aligned} \quad (2.84)$$

这里, $a = \det \mathbf{A}(\mathbf{x})$ 。

由式 (2.84) 可知: 在变换 (2.82) 下, 位移 \mathbf{u} 关于 \mathbf{x} 的高阶微分项将变为位移 $\mathbf{u}'(\mathbf{x}')$ 关于 \mathbf{x}' 同阶及低阶微分项, 即一个 n 阶微分项变换后成为 0 到 n 阶多个微分项之和。这是由于坐标变换过程中用到了微分算子的链式法则。例如, 算子 $\mathcal{C}_{\mathbf{C},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}}$ 在变换 (2.82) 下将变为 $\mathcal{C}_{\mathbf{C}',\mathbf{S}',\mathbf{D}',\mathbf{B}'}$, 其中 $\mathbf{C}', \mathbf{S}', \mathbf{D}', \mathbf{B}'$ 可由式 (2.84) 得到, 令式 (2.84) 中的 \mathbf{S}, \mathbf{D} 和 \mathbf{B} 等于零即可。因此, 算子 $\mathcal{C}_{\mathbf{C},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}}$ 在变换 (2.82) 下不具有形式不变性。根据以上结论, 可得如下判定准则:

准则 I: 若某一 n 阶空间微分方程含有完备的 0 到 n 阶空间微分算子, 则该方程在变换 (2.82) 下具有形式不变性。

准则 I 可直接用于判定现有的微分型非局部理论的控制方程是否具有形式不变性。例如, 各项同性材料的应变梯度弹性理论^[84,85]、应力梯度弹性理论^[9] 和简化的 Mindlin

弹性理论^[83]的控制方程分别为:

$$\begin{aligned}\rho\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t) &= \nabla \cdot [(1 - \ell_0^2 \nabla^2)(\mathbf{C}_0 : \nabla^s \mathbf{u}(\mathbf{x},t))] \\ (1 - \ell_0^2 \nabla^2)\rho\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t) &= \nabla \cdot [\mathbf{C}_0 : \nabla^s \mathbf{u}(\mathbf{x},t)] \\ (1 - \ell_1^2 \nabla^2)\rho\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t) &= (\lambda + \mu)(1 - \ell_2^2 \nabla^2)\nabla \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x},t) + \mu(1 - \ell_3^2 \nabla^2)\nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x},t)\end{aligned}\quad (2.85)$$

其中, ℓ_0 、 ℓ_1 、 ℓ_2 和 ℓ_3 为非局部弹性理论中的特征长度; \mathbf{C}_0 为四阶刚度矩阵。式 (2.85) 中的所有方程均不含有位移 \mathbf{u} 关于 \mathbf{x} 的奇数阶微分项。由准则 I 可知, 式 (2.85) 中的三个控制方程均不具有变换 (2.82) 下的形式不变性。

2.7.2 积分型非局部理论

在讨论完微分算子后, 自然地想到了在积分型非局部理论中广泛使用的积分算子, 下面主要研究积分型非局部理论的控制方程在变换 (2.82) 下的形式。我们首先以线性化态型近场动力学^[6,8]为例, 其控制方程为:

$$\rho(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t) = \int_{\Omega} \mathbf{H}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{y},t) - \mathbf{u}(\mathbf{x},t)) d\mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.86)$$

其中 $\mathbf{H}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 为二阶张量。方程 (2.86) 可表示为

$$\rho(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t) = \int_{\Omega} \mathbf{H}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y},t) d\mathbf{y} - \mathbf{H}_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x},t), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.87)$$

这里 $\mathbf{H}_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{H}(\mathbf{x},\mathbf{y}) d\mathbf{y}$ 。在变换 (2.82) 下, 方程 (2.87) 变为

$$\rho'(\mathbf{x}') \cdot \ddot{\mathbf{u}}'(\mathbf{x}',t) = \int_{\Omega'} \mathbf{H}'(\mathbf{x}',\mathbf{y}') \cdot \mathbf{u}'(\mathbf{y}',t) d\mathbf{y}' - \mathbf{H}'_0(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{u}'(\mathbf{x}',t), \quad \forall \mathbf{x}' \in \Omega' \quad (2.88)$$

其中

$$\begin{aligned}\rho'(\mathbf{x}') &= a^{-1}(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}^T(\mathbf{x}) \\ \mathbf{H}'(\mathbf{x}',\mathbf{y}') &= a^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \cdot \mathbf{A}^T(\mathbf{y})a^{-1}(\mathbf{y}) \\ \mathbf{H}'_0(\mathbf{x}') &= a^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{H}_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}^T(\mathbf{x})\end{aligned}\quad (2.89)$$

比较式 (2.87) 和式 (2.88) 可知, 线性化态型近场动力学的控制方程 (2.87) 在变换 (2.82) 下, 具有形式不变性。另外, 由式 (2.89) 可知, $\mathbf{H}'(\mathbf{x}',\mathbf{y}')$ 仅与 $\mathbf{H}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 相关, 而 $\mathbf{H}'_0(\mathbf{x}')$ 仅与 $\mathbf{H}_0(\mathbf{x})$ 相关, 即式 (2.87) 中的每一项在变换后均保持形式不变。由此可知, 作用于位移 \mathbf{u} 的一类空间积分算子 $\mathcal{H}_{\mathbf{H}}$

$$\mathbf{u} \mapsto \int_{\Omega} \mathbf{H}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y},t) d\mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.90)$$

在变换 (2.82) 下具有形式不变性。进而, 我给出如下判定准则:

准则 II: 若某一积分方程的算子可表示为形如 (2.90) 的形式, 则该方程在变换 (2.82) 下具有形式不变性。

下面我们以 Eringen 理论^[5]为例, 具体说明准则 II 的应用。Eringen 理论^[5]的控制

方程为

$$\rho(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t) = \nabla \cdot \int_{\Omega} \phi(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\mathbf{C}(\mathbf{y}) : \nabla^s \mathbf{u}(\mathbf{y},t) d\mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.91)$$

其中 $\phi(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)$ 为标量函数。方便起见，式 (2.91) 可写为

$$\rho(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t) = \nabla \cdot \int_{\Omega} \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) : \nabla^s \mathbf{u}(\mathbf{y},t) d\mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.92)$$

这里 $\hat{\mathbf{C}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \phi(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\mathbf{C}(\mathbf{y})$ 。在变换 (2.82) 下，式 (2.92) 变为

$$\begin{aligned} \rho'(\mathbf{x}')\ddot{\mathbf{u}}'(\mathbf{x}',t) = & \nabla' \cdot \int_{\Omega'} [\hat{\mathbf{C}}'(\mathbf{x}',\mathbf{y}') : \nabla'^s \mathbf{u}'(\mathbf{y}',t) + \mathbf{S}'(\mathbf{x}',\mathbf{y}') \cdot \mathbf{u}'(\mathbf{y}',t)] d\mathbf{y}' \\ & + \int_{\Omega'} [\hat{\mathbf{D}}'(\mathbf{x}',\mathbf{y}') : \nabla'^s \mathbf{u}'(\mathbf{y}',t) + \mathbf{B}'(\mathbf{x}',\mathbf{y}') \cdot \mathbf{u}'(\mathbf{y}',t)] d\mathbf{y}', \quad \forall \mathbf{x}' \in \Omega' \end{aligned} \quad (2.93)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{C}}'_{pqrs}(\mathbf{x}',\mathbf{y}') & := a^{-1}(\mathbf{x})A_{pi}(\mathbf{x})A_{qj}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{C}}_{ijkl}(\mathbf{x},\mathbf{y})A_{rk}(\mathbf{y})A_{sl}(\mathbf{y})a^{-1}(\mathbf{y}) \\ \hat{\mathbf{S}}'_{pqr}(\mathbf{x}',\mathbf{y}') & := \frac{1}{2}a^{-1}(\mathbf{x})A_{pi}(\mathbf{x})A_{qj}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{C}}_{ijkl}(\mathbf{x},\mathbf{y})(A_{rk,l}(\mathbf{y}) + A_{rl,k}(\mathbf{y}))a^{-1}(\mathbf{y}) \\ \hat{\mathbf{D}}'_{pqr}(\mathbf{x}',\mathbf{y}') & := a^{-1}(\mathbf{x})A_{pi,j}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{C}}_{ijkl}(\mathbf{x},\mathbf{y})A_{qk}(\mathbf{y})A_{rl}(\mathbf{y}) \\ \hat{\mathbf{B}}'_{pq}(\mathbf{x}',\mathbf{y}') & := \frac{1}{2}a^{-1}A_{pi,j}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{C}}_{ijkl}(\mathbf{x},\mathbf{y})(A_{qk,l}(\mathbf{y}) + A_{ql,k}(\mathbf{y})) \end{aligned} \quad (2.94)$$

式 (2.92) 和式 (2.93) 的形式看似不同。实际上，式 (2.91) 右端的积分项为一个空间卷积，可写为

$$\nabla \cdot \int_{\Omega} \phi(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\mathbf{C}(\mathbf{y}) : \nabla^s \mathbf{u}(\mathbf{y},t) d\mathbf{y} = \nabla \cdot [\phi(\mathbf{x}) * (\mathbf{C}(\mathbf{x}) : \nabla^s \mathbf{u}(\mathbf{x},t))] \quad (2.95)$$

其中 $*$ 表示空间卷积。利用卷积的性质，式 (2.91)（或式 (2.92)）中的积分项可表示为形如式 (2.90) 的积分算子，具体推导如下。

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x})\ddot{u}_j(\mathbf{x},t) & = \frac{1}{2} \left[\phi(\mathbf{x}) * C^{ijkl}(\mathbf{x})(u_{l|k}(\mathbf{x},t) + u_{k|l}(\mathbf{x},t)) \right]_{,i} \\ & = C^{ijkl}(\mathbf{x})u_l(\mathbf{x},t) * \phi_{,ki}(\mathbf{x}) - C^{ijkl}_{,k}(\mathbf{x})u_l(\mathbf{x},t) * \phi_{,i}(\mathbf{x}) \\ & \quad + C^{ijkl}(\mathbf{x})u_k(\mathbf{x},t) * \phi_{,li}(\mathbf{x}) - C^{ijkl}_{,l}(\mathbf{x})u_k(\mathbf{x},t) * \phi_{,i}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.96)$$

其中重复指标遵循求和约定。式 (2.96) 最后一个方程的所有项均具有形如式 (2.90) 中积分算子的形式。由准则 II 可知，Eringen 理论^[5]的控制方程 (2.91) 在变换 (2.82) 下具有形式不变性。此外，根据卷积的性质，也可将式 (2.92) 和 (2.93) 表达成统一的形式，再次证明了式 (2.91) 具有形式变换不变性。

事实上，若作用在 \mathbf{u} 上的积分算子为空间卷积，该积分算子在变换 (2.82) 下具有形式不变性。由此可定义如下一类作用在 \mathbf{u} 上的空间积分算子 $\mathcal{J}_{\mathbf{C},\mathbf{S},\mathbf{D},\mathbf{B}}$

$$\mathbf{u} \mapsto -\nabla \cdot [\mathbf{C}(\mathbf{x}) * \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x},t) + \mathbf{S}(\mathbf{x}) * \mathbf{u}(\mathbf{x},t)] + \mathbf{D}(\mathbf{x}) * \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x},t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}) * \mathbf{u}(\mathbf{x},t) \quad (2.97)$$

该积分算子形如微分算子 $\mathcal{C}_{\mathbf{C},\mathbf{S},\mathbf{D},\mathbf{B}}$ ，但由于卷积的存在，它们的性质却截然不同。其中

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(\mathbf{x}) * \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{C}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) : \nabla \mathbf{u}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} \\ \mathbf{S}(\mathbf{x}) * \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{S}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} \\ \mathbf{D}(\mathbf{x}) * \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{D}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) : \nabla \mathbf{u}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}) * \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{B}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y}\end{aligned}\quad (2.98)$$

这里 $n = 1, 2, 3$ 。利用空间卷积的性质，易知算子 $\mathcal{J}_{\mathbf{C},\mathbf{S},\mathbf{D},\mathbf{B}}$ 在变换 (2.82) 下具有形式不变性。按照准则 II 易证，Eringen 理论、Kunin 理论、线性化 PD 理论、KPD 和 STPD 均满足变换 (2.82) 下的变换不变性。

由于积分项和微分项在变换过程中不会发生相互转化，由此可直接给出如下判定准则：

准则 III：若某一微分-积分方程的微分和积分算子在变换 (2.82) 下均具有形式不变性，则该方程在变换 (2.82) 下具有形式不变性。

准则 III 可直接用于判定微分-积分型非局部理论的变换不变性，主要包括 Kröner 理论^[3]、Willis 理论^[20,21,45] 和本章推得的控制方程。

例如，Kröner 理论^[3] 的控制方程为

$$\rho(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot [\mathbf{C}(\mathbf{x}) : \nabla^s \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] + \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.99)$$

其中 $\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ 是一个二阶张量函数。由于式 (2.99) 的空间微分项，即右端第一项，不满足形式变换不变性，则由准则 III 可知 Kröner 理论^[3] 的控制方程 (2.99) 在变换 (2.82) 下不满足变换不变性。

同理易知，本章推得的时空耦合方程 (2.21) 和空间非局部方程 (2.39)，及原 Willis 方程 (1.2) 在变换 (2.82) 下均不具有变换不变性。由于方程 (2.21)、方程 (2.39) 是通过经典方程自然推得的，两方程均不满足变换不变性，在这一点上是自洽的。注意到，原 Willis 方程 (1.2) 同样也是由非均质材料模型得到的，同时也假设各组材料满足经典线弹性方程，因此原 Willis 方程 (1.2) 不满足形式不变性这一结论在理论上也是自洽的。需要特别说明的是，Milton 等^[18] 将原 Willis 方程表达成了仅含有积分项的积分型 Willis 方程，并证明了其满足形式不变性。该表达只是一种形式上的表示，并非完全等效，确切地说，Milton 等^[18] 仅证明了该积分型 Willis 方程（而并非原始的 Willis 方程）满足变换不变性。

综上所述，现有的非局部弹性理论，Eringen 理论、Kunin 理论、线性化 PD 理论、KPD 和 STPD 均满足变换 (2.82) 下的形式不变性。与此同时，考虑到只有 PD 理论属于位移积分型非局部理论，可直接用于处理不连续问题。则由以上分析可知，只有 STPD

(式 (2.64)) 才可同时满足理想非局部理论的三点要求: 考虑微结构的影响 (同时含有特征时间和特征长度)、满足变换不变性、直接处理不连续问题。

2.8 本章小结

本章集中于时空耦合非局部弹性理论基本问题的研究, 探讨了时空耦合非局部弹性理论的起源、物理机制、定量表征, 及现有非局部理论之间的联系, 各自的色散关系和动态响应, 最后分析了非局部弹性理论的变换不变性。本章主要研究工作和结论包括:

(1) 基于非均质材料模型, 同时考虑惯性项和体力项的影响, 得到的控制方程自然表现为时空耦合非局部方程, 且时空耦合非局部项存在于惯性项、非惯性项和等效体力项中。该控制方程同样适用于孔洞和刚性夹杂的情况。当且仅当材料密度、刚度的差异均消失时, 时空耦合非局部项才会消失, 即说明了时空耦合非局部性来自于材料的非均质性。

(2) 本章得到的时空耦合非局部方程在 Mindlin 位移模式的假设下, 可看作是 Mindlin 方程的积分弱形式, 也可表达为速度耦合项不为零的 Willis 方程的形式, 从而实现 Mindlin 方程和 Willis 方程的定量表征, 三者具有相同的性质。不考虑惯性项时, 在 Silling 位移模式的假设下, 推得的时空耦合非局部方程可退化为 Kröner 方程, 近似为 Dayal 的动力非局部 PD、Eringen 方程、线性化 PD。基于复合材料圆柱模型的一维时空耦合控制方程又可近似为时空耦合非局部 PD (STPD)。

(3) 本章得到的时空耦合非局部方程与 Mindlin 方程具有类似的色散关系, 包括了声学支和光学支。在短波极限处, 声学支和光学支分别趋近于具有较小和较大群速度的复合材料相的线性色散关系。近似方程 STPD 的色散关系同样有声学支和光学支, 且保留了近似前的性质。退化后的空间非局部方程 (如动力非局部 PD) 仅仅有声学支, 其声学支在短波极限处仍趋于基体的线性色散关系。而近似形式的动力非局部 PD 和线性化 PD 的色散关系仅有声学支, 且在短波极限处趋于常数。

(4) 通过变换不变性分析知, 除了微分型 Willis 方程和积分型 Willis 方程满足弹性变形变换的不变性之外, Eringen 理论、Kunin 理论、线性化 PD、动力非局部 PD、时空耦合非局部 PD 均满足变换不变性; Kröner 理论、微分型非局部理论、原 Willis 理论及本章推得的时空耦合方程 (2.21) 和空间非局部方程 (2.39) 均不满足变换不变性; 在本文调研的所有非局部理论范围内, 只有时空耦合非局部 PD 同时满足我们提出的理想非局部理论的三点要求。

第三章 非均质材料的时空耦合非局部热弹性理论

随着超常规加热手段及新型材料科技的发展，实际应用中出现了大量的具有强瞬态、非均质、微尺度特征的超常传热行为^[106]。例如，超快激光技术在材料加工中，利用急速传热产生巨大的局部温度变化率和温度梯度实现对材料结构性能的改变；复合材料在应用于热防护、航空发动机中也承受着高温梯度、高温变化率、高应变梯度及高应变率；此外在生物组织中，热传播呈现出明显的热波现象^[107]。针对以上超常规的现象，学者们先后提出了非傅里叶热传导理论、广义热弹性理论。

大多数非傅里叶热传导理论和广义热弹性理论是通过引入时间延迟项实现的，按照本论文第一章的分类方式，它们可看作是一种弱的时间非局部理论。也有少数涉及空间非局部的非傅里叶热传导理论以及热弹性理论^[108]。但至今没有一种热弹性理论在热传导方程和变形方程中同时考虑了时空非局部性。与此同时，现有的非傅里叶热传导理论和广义热弹性理论面临的最关键的一个问题仍是物理机制不清楚，很多参数无法定量表征。另外，现有理论的控制方程大多是高阶微分方程，而在以上提到的超常规应用背景中物理场往往是急剧变化的，具有很高的梯度，这无疑加重了高阶微分方程数值实现的困难。

为此，本章基于非均质材料模型探索了时空耦合非局部热弹性理论的起源，并在此基础上，基于位移积分型空间非局部理论——近场动力学（PD），分别建立了 PD 非傅里叶热传导理论和 PD 广义热弹性理论。

3.1 时空耦合非局部热弹性理论的起源

3.1.1 非均质材料的宏观热弹性能

现考虑图 2.1 所示的复合材料圆柱模型，纤维和基体材料均满足如下经典热弹方程

$$\begin{cases} \rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot [\mathbf{C} : \nabla^s \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] - \beta_T \cdot \nabla T(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \\ \rho c_v \dot{T}(\mathbf{x}, t) = \kappa \nabla^2 T(\mathbf{x}, t) - T(\mathbf{x}, t) \beta_T : \nabla \otimes \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + h_s(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad (3.1)$$

其中 \mathbf{u} 和 T 分别为位移和温度场； ρ 和 c_v 分别为密度和比热容； \mathbf{C} 为四阶刚度张量； κ 为热导率； β_T 为二阶热模量张量； \mathbf{b} 和 h_s 分别为体力和热源密度。图 2.1 所示模型变形场的边界条件和界面条件分别同式 (2.42) 和式 (2.43)。热传导问题的边界条件为

$$q_r^m|_{r=r_M} = 0, \quad q_z|_{z=\pm L} = q_0(t) \quad (3.2)$$

界面条件为

$$q_r^M|_{r=r_I, -L \leq z \leq L} = q_r^I|_{r=r_I, -L \leq z \leq L} \quad (3.3)$$

其中 q_r 和 q_z 分别为热流向量 \mathbf{q} 的径向和轴向分量。在不考虑非均质性等效体力和热源影响的情况下，现将变形场和温度场分别考虑如下。

首先对于变形场而言，根据第 2.4.1 节，复合材料圆柱的位移场仍可分解为式 (2.53) 或式 (2.55)。类似第 2.4.2 节的推导，关于整个复合材料圆柱的截面平均后可得

$$\begin{aligned} \rho_M \ddot{u}(z, t) + \gamma_\rho G_u * \ddot{u} = E_M \bar{u}''(z, t) + \gamma_E G_u * \bar{u}'' + b(z, t) \\ - \beta_{TM} \bar{T}'(z, t) - \gamma_\beta T_I(z, t) - (\gamma_E G_u'' - \gamma_\rho \ddot{G}_u) * \frac{\beta_{TI} \ell_u^2}{E_I} T_I' \end{aligned} \quad (3.4)$$

其中 \bar{T} 和 \bar{u} 分别为截面平均温度和位移，本节中上标短横线均表示关于横截面积取平均， $\gamma_\beta = \bar{\beta}_T - \beta_{TM}$ ，其它参数及函数 G_u 同第 2.4.1 节。

对于温度场，按照第 2.4.1 节中的推导，复合材料圆柱的温度场可分解为类似位移场 (2.55) 的形式

$$T_I(r, z, t) = \bar{T}(z, t) - \phi_h W_T(z, t), \quad T_M(r, z, t) = \bar{T}(z, t) + (h(r) - \phi_h) W_T(z, t) \quad (3.5)$$

其中 $h(r)$ 和 ϕ_h 同第 2.4.1 节。则复合材料截面平均后的热传导方程为

$$\begin{aligned} \rho_M c_{vM} \dot{\bar{T}}(z, t) + \gamma_{c_p} G_T * \dot{\bar{T}} = \kappa_M \bar{T}''(z, t) + \gamma_\kappa G_T * \bar{T}'' + h_s(z, t) \\ - \gamma_{\beta u'} G_T * \bar{T} - \beta_{TM} \left[\left(1 - \frac{\phi_1}{\phi_h^2} \right) \dot{u}'_I + \frac{\dot{u}'_I \phi_1}{\phi_h^2} \right] \bar{T}(z, t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中

$$\begin{aligned} \gamma_{c_p} = \overline{\rho c_v} - \rho_M c_{vM}, \quad \gamma_\kappa = \bar{\kappa} - \kappa_M \\ \gamma_{\beta u'} = \gamma_\beta \dot{u}'_I + \beta_{TM} W'_u(\phi_h^2 - \phi_1), \quad \phi_1 = \frac{\int_{A_M} h^2(r) dA_M}{A_I + A_M} \end{aligned} \quad (3.7)$$

且 $G_T = g_T \lambda_T^2$ ， g_T 可由以下方程求得

$$\frac{1}{c_{TI}^2} \dot{g}_T(z, t) - g_T''(z, t) + \left(\frac{\beta_{TI}}{\kappa_I} \dot{u}'_I + \lambda_T^2 \right) g_T(z, t) = \delta(z) \delta(t) \quad (3.8)$$

其中， $c_{TI} = \sqrt{\kappa_I / (\rho_I c_{vI})}$ ， $\lambda_T = \sqrt{\kappa_M \beta_h^2 / \kappa_I}$ 。

式 (3.4) 和式 (3.6) 构成了复合材料宏观热弹性能的控制方程。由两式可知以下三点：第一，时空耦合非局部项在两式的惯性项、非惯性项及热力耦合项中均存在，尤其是在热力耦合项中的形式极其复杂；第二，若不考虑热力耦合项的影响，式 (3.4) 和式 (3.6) 退化为两个解耦的控制方程，其中变形方程同式 (2.56)，温度场方程为

$$\rho_M c_{vM} \dot{\bar{T}}(z, t) + \gamma_{c_p} G_T * \dot{\bar{T}} = \kappa_M \bar{T}''(z, t) + \gamma_\kappa G_T * \bar{T}'' + h_s(z, t) \quad (3.9)$$

第三，若在推导过程中，不考虑惯性项的影响可得到与式 (3.4) 和式 (3.6) 形式相近的

空间非局部控制方程。此时时空卷积符号替换为空间卷积符号，格林函数替换为相应方程在无惯性项情况下的格林函数。假设惯性项系数和热模量相等，即 $\rho_I = \rho_M =: \rho$ ， $c_{vI} = c_{vM} =: c_v$ ， $\beta_{TI} = \beta_{TM} =: \beta_T$ ，方程 (3.4) 可表达为

$$\rho c_v \dot{\bar{T}}(z) = \kappa_M \bar{T}''(z) + \frac{(\bar{\kappa} - \kappa_M) \lambda_T^3}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [\bar{T}(z_0) - \bar{T}(z)] e^{-\lambda_T |z - z_0|} dz_0 + h_s(z) \quad (3.10)$$

并进一步近似为

$$\rho c_v \dot{\bar{T}}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\kappa_M \zeta^3}{2} e^{-\zeta |z - z_0|} + \frac{(\bar{\kappa} - \kappa_M) \lambda_T^3}{2} e^{-\lambda_T |z - z_0|} \right) [\bar{T}(z_0) - \bar{T}(z)] dz_0 + h_s(z) \quad (3.11)$$

上式即为近场动力学热扩散方程^[109]，为一空间非局部热传导方程。

上述复合材料模型得到的热传导方程 (3.9) 中的时空耦合非局部项同时含有特征时间和特征长度两个特征尺度，本章引言部分曾提到非傅里叶热传导方程中也含有特征时间，两者之间是否存在联系呢？或者唯象的非傅里叶热传导理论的物理机制是否可用该非均质材料模型解释呢？接下来就这些问题作出回答，进而探讨非傅里叶热传导的起源。

对方程 (3.9) 同时进行傅里叶和拉普拉斯变换可得

$$R(k, s) \tilde{T}(k, s) = 0 \quad (3.12)$$

式中 $\tilde{T}(k, s)$ 为 $\bar{T}(x, t)$ 变换后的函数， $R(k, s)$ 为

$$R(k, s) = \mathcal{J}(k, s) \overline{\rho c_v} [s + \bar{c}_T^2 k^2 + t_c (s + c_{TI}^2 k^2) s + t_c c_{TM}^2 (s + c_{TI}^2 k^2) k^2] \quad (3.13)$$

其中， $\bar{c}_T^2 = \bar{\kappa} / \overline{\rho c_v}$ ， $c_{TI}^2 = \kappa_I / (\rho_I c_{vI})$ ， $c_{TM}^2 = \kappa_M / (\rho_M c_{vM})$ ， $t_c = \rho_M c_{vM} / (\overline{\rho c_v} c_{TI}^2 \lambda_T^2)$ ，且

$$\mathcal{J}(k, s) = \mathcal{L} \{ \mathcal{F} \{ G_T \} \} = \frac{c_{TI}^2}{s + c_{TI}^2 k^2 + c_{TI}^2 \lambda_T^2} \quad (3.14)$$

再对式 (3.13) 进行傅里叶逆变换和拉普拉斯逆变换可得

$$G_T * \overline{\rho c_v} \left[\dot{\bar{T}} - \bar{c}_T^2 \bar{T}'' + t_c (\dot{\bar{T}} - c_{TI}^2 \bar{T}'')_t - t_c c_{TM}^2 (\dot{\bar{T}} - c_{TI}^2 \bar{T}'')_{zz} \right] = 0 \quad (3.15)$$

其中下标 t 和 zz 分别表示关于时间 t 求一阶导和关于空间 z 求二阶导。由 Lerch 定理可知，式 (3.15) 和式 (3.9) 等效。式 (3.15) 成立的一个充分条件可表示为

$$t_c \ddot{\bar{T}} + \dot{\bar{T}} = \bar{c}_T^2 \bar{T}'' + t_c (c_{TI}^2 + c_{TM}^2) \dot{\bar{T}}''' - t_c c_{TI}^2 c_{TM}^2 \bar{T}'''' \quad (3.16)$$

上式为双曲型方程。相比于经典的傅里叶热传导方程，上式同时含有高阶时间微分项和高阶空间微分项，同时具有特征时间和特征长度，为弱时空耦合非局部控制方程。若不考虑右端最后一项，上式与 DPL (dual-phase-lag) 非傅里叶热传导方程^[110] 的形式一致。事实上，对于常用的材料， c_{TI}^2 和 c_{TM}^2 的数量级约为 $10^{-4} \sim 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ，因此最后一项的系数与前几项相比可忽略不计，即式 (3.16) 可近似为

$$t_c \ddot{\bar{T}} + \dot{\bar{T}} = \bar{c}_T^2 \bar{T}'' + t_c (c_{TI}^2 + c_{TM}^2) \dot{\bar{T}}''' \quad (3.17)$$

上式即为 DPL 非傅里叶热传导理论的瞬态热传导方程。可见，非均质材料的宏观热传导性能自然由非傅里叶热传导方程描述。至此，我们用一个简单的复合材料模型，赋予唯象的非傅里叶热传导理论一个清晰的物理解释，直接证明了材料的非均质性可以导致非傅里叶效应，且给出了每个参数的定量表征。

综上所述，我们得到了以下三点重要启示：第一，非均质材料的变形场和温度场都具有时空耦合非局部项；第二，若仅考虑热传导分析，非均质材料的热传导方程可近似为近场动力学热扩散理论，且每个参数可定量表征；第三，若仅考虑热传导分析，非均质材料的热传导方程也可近似为 DPL 非傅里叶热传导理论，且每个参数可定量表征。近场动力学热扩散理论和 DPL 非傅里叶热传导理论分别含有特征长度和特征时间，分别是空间非局部热传导理论和时间非局部热传导理论。这进一步启示我们，基于两者发展一种时空耦合非局部热传导理论，即基于近场动力学的非傅里叶热传导理论，该理论将会有以下两点优势：第一，物理机制清楚，每个参数可定量表征；第二，易于处理不连续问题，满足超常规传热的工程需要。为此，下一节的主要任务就是建立近场动力学非傅里叶热传导理论框架。在此之前，有必要通过几个简单的算例直观地展示一下非局部性的重要性。

3.1.2 算例分析

上一小节将复合材料圆柱模型，通过截面平均等效为一个复合材料杆的一维模型，该模型的控制方程自然表现为非局部方程。本小节将考虑该等效复合材料杆在若干简单外载下的静力学和稳态热传导响应。与此同时，利用有限元 (FEM) 软件 ANSYS 数值建模，计算了三维复合材料圆柱模型 ($r_M/L = 0.05$, $r_M/L = 0.03$) 的数值解。将该数值解进行截面平均后得到的结果作为复合材料圆柱杆的 FEM 解，并把其看作是精确解。最后通过对比非局部解、经典解和 FEM 解说明非局部模型的合理性。

3.1.2.1 变形场

在变形场的第一个算例中，忽略体力和热效应，在如图 2.1 所示复合材料圆柱的两端面分别施加两相等的应力 σ_0 。下面分别利用经典方程和上一节推得的非局部方程计算复合材料杆的等效位移场，并和 FEM 数值解对比。

为了避免不必要的数值误差，可通过解析的方式得到上述问题的解。为此将上述问题等效为无限长杆受两点 $z = \pm L$ 集中载荷作用，并由方程描述为

$$\begin{aligned} \langle E \rangle \bar{u}'' &= \delta(z-L) + \delta(z+L) \\ E_m \bar{u}''(z,t) + \gamma_E \beta_u^2 \int_{-\infty}^{+\infty} g_u(z-z_0) \bar{u}''(z_0,t_0) dz_0 &= \delta(z-L) + \delta(z+L) \end{aligned} \quad (3.18)$$

上式中两方程的解可分别由格林函数法（将在第四章详细介绍）求解为

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\text{local}}(z) &= \frac{\sigma_0}{2\bar{E}} (|z+L| - |z-L|) \\ \bar{u}_{\text{nonlocal}}(z) &= \frac{\sigma_0}{2\chi_u} \left(\frac{1}{E_m} - \frac{1}{\bar{E}} \right) \left(e^{-\chi_u|z-L|} - e^{-\chi_u|z+L|} \right) + \bar{u}_{\text{local}}(z) \end{aligned} \quad (3.19)$$

其中， $\chi_u = \sqrt{\frac{\bar{E}}{E_m}} \lambda_u$ 。

在第二个算例中，仅考虑温度变化对位移场的影响，假设纤维和基体的温度均升高 T_0 ，直接将式 (3.19) 中的 σ_0 替换为 $\bar{\beta}T_0$ 即可得到此时的温度场。

表 3.1 复合材料的力学性能

	$E_f(\text{GPa})$	$E_m(\text{GPa})$	ν_f	ν_m	$\alpha_f(^\circ\text{C})$	$\alpha_m(^\circ\text{C})$
E-Glass/MY750 ^[111]	74	3.35	0.2	0.35	4.9	58
AS/Epoxy ^[111]	231	3.2	0.2	0.35	-0.7	58

以复合材料 E-Glass/MY750 和复合材料 AS/Epoxy 为例，无量纲位移 $\bar{u}\bar{E}/\sigma_0L$ （或 $\bar{u}\bar{E}/\bar{\beta}T_0L$ ）随无量纲位置 z/L 的变化关系如图 3.1 所示。其中两材料的材料参数^[111]如表 3.1 所示，两种材料中纤维的体积分数均为 36%。由图 3.1 可知，非局部方程的解在整个区域均与有限元解吻合，而经典解在端部某一区域内与有限元解存在较大偏差。根据圣维南原理，经典方程预测的复合材料圆柱轴向等效杨氏模量 \bar{E} 在远离边界的区域内十分精确，图 3.1 中的结果也验证了这一点，但边界附近的等效弹性性能却明显不同于内部区域，这一现象也就是预测复合材料等效性能中常提到的“边界效应”^[101]，该现象已经引起了复合材料细观力学的极大关注^[100,112,113]。非局部方程精确地捕捉到了上述情况下的“边界效应”，而经典细观力学可能需要复杂的数值计算才能达到同样的精度。

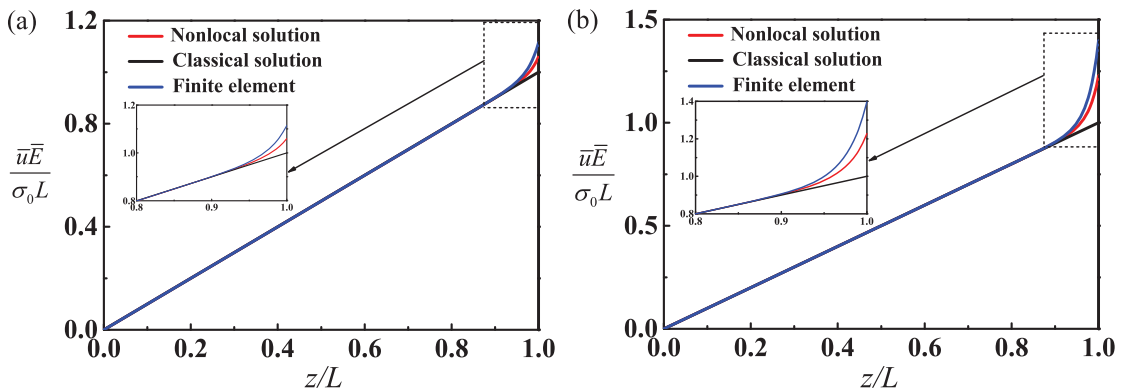


图 3.1 复合材料圆柱截面平均位移场：(a) E-Glass/MY750；(b) AS/Epoxy

基于解析解 (3.19)，可进一步分析复合材料的等效弹性模量和等效热膨胀系数。由

两者的定义

$$E^{eff} = \frac{\langle \sigma \rangle}{\langle \varepsilon \rangle}, \quad \alpha^{eff} = \frac{\Delta L}{LT} \quad (3.20)$$

其中尖括号在本算例中表示关于杆长 L 取线平均，可得经典方程和非局部方程预测的等效弹性模量和等效热膨胀系数分别为

$$\begin{aligned} E_{local}^{eff} &= \bar{E}, \quad \alpha_{local}^{eff} = \frac{\bar{\beta}}{\bar{E}} = \bar{\alpha} \\ E_{nonlocal}^{eff} &= \frac{\bar{u}_{local}(L)}{\bar{u}_{nonlocal}(L)} \bar{E}, \quad \alpha_{nonlocal}^{eff} = \frac{\bar{E}}{E_{nonlocal}^{eff}} \bar{\alpha} \end{aligned} \quad (3.21)$$

其中式 (3.21) 的最后一个公式与基于经典理论的 Levin 公式^[114,115] 相对应。对复合材料 E-Glass/MY750，利用式 (3.21) 可计算得到 $E_{nonlocal}^{eff} = 0.93\bar{E}$ 和 $\alpha_{nonlocal}^{eff} = 1.08\bar{\alpha}$ 。对复合材料 As/Epoxy 有 $E_{nonlocal}^{eff} = 0.79\bar{E}$ 和 $\alpha_{nonlocal}^{eff} = 1.27\bar{\alpha}$ 。

3.1.2.2 温度场

在图 2.1 所示的复合材料圆柱两端施加相等的热流向量 q_0 ，类似于上述算例中的求解方法，可得此时的稳态温度场的解析解为

$$\begin{aligned} \bar{T}_{local}(z) &= \frac{q_0}{2\bar{\kappa}} (|z+L| + |z-L|) \\ \bar{T}_{nonlocal}(z) &= \frac{q_0}{2\chi_T} \left(\frac{1}{\kappa_m} - \frac{1}{\bar{\kappa}} \right) \left(e^{-\chi_T|z-L|} - e^{-\chi_T|z+L|} \right) + \bar{T}_{local}(z) \end{aligned} \quad (3.22)$$

以 CNT/Polymer^[116] 和 Diamond/ZnS^[117] 两种复合材料为例，两复合材料的热性能如表 3.2 所示，其中纤维的体积分数均为 36%。无量纲温度场 $\bar{T}\bar{\kappa}/q_0L$ 随无量纲位置 z/L 的变换如图 3.2 所示。可得到与位移场相似的结论：非局部方程的解与有限元解更吻合，且能顺利捕捉到边界效应，其中 κ_I/κ_M 越大，边界效应越明显。

表 3.2 复合材料的热性能

	$\kappa_I(W/(mK))$	$\kappa_M(W/(mK))$
Diamond/ZnS ^[117]	600	17.4
CNT/Polymer ^[116]	3000	5

综上所述，以上这些简单的算例直观地说明了非局部方程的好处和优势。较之于经典方程，非局部方程包含了更多的微观信息，能够自然捕捉到变形场和温度场中变形梯度或温度梯度较大处的“边界效应”。可以预想，在动态问题中非局部作用同样不可忽略，且有必要引入特征时间这一非局部特征尺度，也就是我们上一小节结尾提出的建立近场动力学非傅里叶热传导理论的构想。这一构想将在下一节中实现。

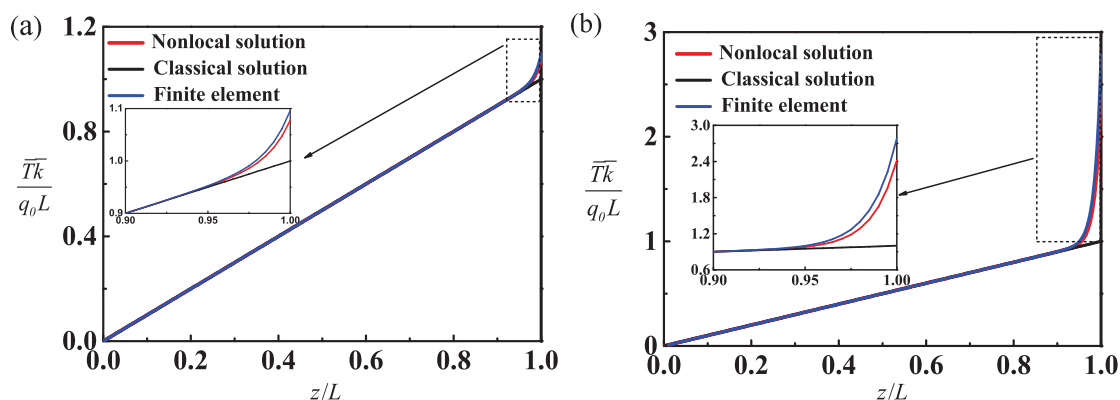


图 3.2 复合材料圆柱模型的截面平均温度场: (a) Diamond/ZnS; (b) CNT/Polymer

3.2 PD 非傅里叶热传导理论

本节的主要任务是建立适用于不连续问题和超常规传热的时空耦合非局部热传导理论, 较为直接的一个思路是将位移型空间非局部理论——近场动力学理论与非傅里叶热传导相结合, 发展基于近场动力学的非傅里叶热传导理论。为此, 本节将在态型近场动力学的框架内引入“相位滞后 (phase-lag^[110])”的概念, 建立态型近场动力学非傅里叶热传导模型。

“相位滞后”概念在非傅里叶热传导领域成功应用的典范之一就是 DPL (dual-phase-lag) 模型^[110], 可表达为

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t + \tau_q) = -k\nabla T(\mathbf{x}, t + \tau_T) \quad (3.23)$$

其中, τ_q 和 τ_T 分别为热流向量和温度梯度的相位滞后参数, 分别表示介质在非零时刻的“热能惯性”和“微观结构相互作用”^[107]。当 $\tau_q > \tau_T$ 时, 温度梯度引起热流, 即热流是温度梯度的响应; 反之, 当 $\tau_q < \tau_T$ 时, 热流导致温度梯度, 即温度梯度是热流的响应^[118]。式 (3.23) 表示介质在 $t + \tau_T$ 时刻的温度梯度对应 $t + \tau_q$ 时刻的热流向量。相位滞后 τ_q 和 τ_T 是材料的固有热特性, 对于复合材料来说, 两者与微结构的材料性能及几何构型相关。另外, DPL 模型同时兼具了热扩散、热波 (CV) 模型、声子-电子相互作用模型等模型的特点。例如, 当 $\tau_T = 0$, DPL 模型退化为热波模型; 当 $\tau_T = \tau_q = 0$ 时, DPL 模型退化为热扩散模型即经典的傅里叶热传导模型。鉴于 DPL 模型在理论上的普适性及其广泛应用, 下面将双相位滞后的概念引入到近场动力学的热传导框架中, 建立相应的 PD 非傅里叶热传导模型。

3.2.1 态型 PD 非傅里叶热传导理论

本节仅考虑热传导, 忽略动能和机械能变化, 由能量守恒方程可得, 任一物质点 \mathbf{x} 的热能守恒方程为

$$\dot{\epsilon}(\mathbf{x}, t) = Q_q(\mathbf{x}, t) + s_b(\mathbf{x}, t) \quad (3.24)$$

式中

$$\dot{\epsilon}(\mathbf{x}, t) = \rho c_v \dot{T}(\mathbf{x}, t) \quad (3.25)$$

其中, $\dot{\epsilon}(\mathbf{x}, t)$ 为参考构型中单位体积内的内能变化率; $s_b(\mathbf{x}, t)$ 为单位体积内热能产生的速率; ρ 为密度; c_v 为比热容; $\dot{T}(\mathbf{x}, t)$ 为温度关于时间的导数。热流 $Q_q(\mathbf{x}, t)$ 为在时刻 t 物质点 \mathbf{x} 与 \mathcal{H}_x 内的所有物质点之间的单位体积内的热交换率, 其中 \mathcal{H}_x 是以 \mathbf{x} 为圆心, l 为半径构成的非局部邻域 (在近场动力学理论中 l 称为“视界”), 热流 $\bar{Q}(\mathbf{x}, t)$ 可表示为

$$Q_q(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathcal{H}_x} f_Q(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) dV_{\mathbf{x}'} \quad (3.26)$$

其中, \mathbf{x}' 为 \mathcal{H}_x 内的任一点; $f_Q(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$ 为态型近场动力学热响应函数, 也是 \mathbf{x} 和 \mathbf{x}' 两点的函数, 主要取决于两部分: 一部分是物质点 \mathbf{x} 的热流密度状态, 该部分主要依赖于物质点 \mathbf{x} 与其邻域内任一点的温度差; 另一部分是物质点 \mathbf{x}' 的热流密度状态, 该部分主要依赖于物质点 \mathbf{x}' 与其邻域内任一点的温度差。因此近场动力学热响应函数 f_Q 被称作“双热流密度 (dual heat flow density)”^[109]。

我们采用 Oterkus 等^[109] 在态型近场动力学热扩散模型中定义的一些概念。与 \mathbf{x} 相关的温度差、微热势 (microthermal potential)、热流密度分别组成了温度态 $\underline{\tau}[\mathbf{x}, t]$ 、微热势态 $\underline{z}[\mathbf{x}, t]$ 和热流密度态 $\underline{q}[\mathbf{x}, t]$ 。温度态 (temperature state) $\underline{\tau}[\mathbf{x}, t]$ 被定义为

$$\underline{\tau}[\mathbf{x}, t] \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle = T(\mathbf{x}', t) - T(\mathbf{x}, t) \quad (3.27)$$

其中, 尖括号包含了相互作用的两物质点。温度态可类比于经典傅里叶热传导理论中温度梯度的概念, 而微热势态 \underline{z} 是关于温度态的函数, 类比于经典中的热势能的概念。现在将两个相位滞后的概念引入到近场动力学的传热框架内。此时的 τ_q 和 τ_T 分别代表了热流密度态和温度态的相位滞后。同时在瞬态过程中允许温度态引起热流态, 也允许热流态导致温度态。温度态和热流态直接满足关系式

$$\underline{q}[\mathbf{x}, t + \tau_q] = \frac{\partial \underline{z}(\underline{\tau}[\mathbf{x}, t + \tau_T])}{\partial T(\mathbf{x}, t + \tau_T)} = \underline{h}[\mathbf{x}, t + \tau_T] \quad (3.28)$$

其中 $\underline{h}[\mathbf{x}, t + \tau_T]$ 是关于温度态的函数。式 (3.28) 表示介质在 $t + \tau_T$ 时刻的温度态对应 $t + \tau_q$ 时刻的热流态。则近场动力学热响应函数可表示为

$$f_Q(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t + \tau_q) = \underline{q}[\mathbf{x}, t + \tau_q] \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle - \underline{q}[\mathbf{x}', t + \tau_q] \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}' \rangle \quad (3.29)$$

结合式 (3.28), (3.29) 和 (3.26) 可得

$$Q_q(\mathbf{x}, t + \tau_q) = \int_{\mathcal{H}_x} [\underline{h}[\mathbf{x}, t + \tau_T] \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle - \underline{h}[\mathbf{x}', t + \tau_T] \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}' \rangle] dV_{\mathbf{x}'} \quad (3.30)$$

关于时间 t 进行泰勒展开可使上式中所有物理量对应于同一时刻。例如关于时间 t 进行

一阶泰勒展开，可得最简单的表达式

$$\begin{aligned}
 Q_q(\mathbf{x}, t) + \tau_q \frac{\partial Q_q(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \cong & \int_{\mathcal{H}_x} [\underline{h}[\mathbf{x}, t] \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle - \underline{h}[\mathbf{x}', t] \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}' \rangle] dV_{\mathbf{x}'} \\
 & + \tau_T \int_{\mathcal{H}_x} \left[\frac{\partial \underline{h}[\mathbf{x}, t] \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle}{\partial t} - \frac{\partial \underline{h}[\mathbf{x}', t] \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}' \rangle}{\partial t} \right] dV_{\mathbf{x}'}
 \end{aligned} \quad (3.31)$$

将式 (3.25) 代入式 (3.24) 可得

$$Q_q = \dot{\varepsilon} - s_b = \rho c_v \dot{T} - s_b \quad (3.32)$$

再将式 (3.32) 代入式 (3.31) 即可得到态型近场动力学非傅里叶热传导模型的瞬态方程

$$\begin{aligned}
 \tau_q \rho c_v \ddot{T}(\mathbf{x}, t) + \rho c_v \dot{T}(\mathbf{x}, t) = & \int_{\mathcal{H}_x} [\underline{h}[\mathbf{x}, t] \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle - \underline{h}[\mathbf{x}', t] \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}' \rangle] dV_{\mathbf{x}'} \\
 & + \tau_T \int_{\mathcal{H}_x} [\dot{\underline{h}}[\mathbf{x}, t] \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle - \dot{\underline{h}}[\mathbf{x}', t] \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}' \rangle] dV_{\mathbf{x}'} \\
 & + s_b(\mathbf{x}, t) + \tau_q \dot{s}_b(\mathbf{x}, t)
 \end{aligned} \quad (3.33)$$

上式是一个关于时间微分和空间积分的微分-积分型方程，不存在关于空间的微分项。因此该方程对不连续场仍适用，能够直接用于包含裂纹、多相材料等不连续问题的热传导分析中。由于引入了类似 DPL 模型中的相位滞后的概念，我们将该态型近场动力学非傅里叶热传导模型称为 PD-DPL (peridynamic dual-phase-lag) 模型。若只有 $\tau_T = 0$ ，式 (3.33) 变为

$$\begin{aligned}
 \tau_q \rho c_v \ddot{T}(\mathbf{x}, t) + \rho c_v \dot{T}(\mathbf{x}, t) = & \int_{\mathcal{H}_x} [\underline{h}[\mathbf{x}, t] \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle - \underline{h}[\mathbf{x}', t] \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}' \rangle] dV_{\mathbf{x}'} \\
 & + s_b(\mathbf{x}, t) + \tau_q \dot{s}_b(\mathbf{x}, t)
 \end{aligned} \quad (3.34)$$

该模型定义为近场动力学热波模型。它继承了近场动力学模型和传统热波模型（微分型）的优点，既适用于传统热波模型的应用领域，如有较大相位滞后参数的生物材料传热分析^[119]，又可便于处理上述应用中遇到的不连续问题。当 $\tau_q = \tau_T = 0$ 时，式 (3.33) 退化为近场动力学热扩散模型^[109]

$$\rho c_v \dot{T}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathcal{H}_x} [\underline{h}[\mathbf{x}, t] \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle - \underline{h}[\mathbf{x}', t] \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}' \rangle] dV_{\mathbf{x}'} + s_b(\mathbf{x}, t) \quad (3.35)$$

PD-DPL 模型具有与近场动力学热扩散模型^[109] 相同的空间积分形式，前者较后者增加了关于时间的二阶导数项。因此 PD-DPL 模型的边界条件与近场动力学热扩散模型一致。具体可参见文献^[109]，这里不再赘述。而 PD-DPL 模型的初始条件为

$$T(\mathbf{x}, 0) = T^*(\mathbf{x}), \quad \dot{T}(\mathbf{x}, 0) = \dot{T}^*(\mathbf{x}) \quad (3.36)$$

需要指出的是，传统 DPL 模型中，相位滞后的存在导致边界条件中温度梯度和热流

向量的关系及其复杂，关于温度场的控制方程很难应用到给定热流向量的边界问题中^[118]。但 PD-DPL 模型不存在类似的困难，表面给定的热流向量在 PD-DPL 模型中将等效为单位体积的产热速率施加到参考构型的边界层上。另外，与传统的 DPL 模型相比，PD-DPL 模型主要有以下两方面的优点：一是 PD-DPL 模型考虑了空间非局部的影响；二是 PD-DPL 模型易于处理不连续问题。此外，当非局部特征长度 ℓ 趋于零时，PD-DPL 模型将退化为传统的 DPL 模型。

3.2.2 键型 PD 非傅里叶热传导理论

作为态型近场动力学热传导理论的特例，可以假设热传导模型中两物质点间的热流密度仅仅依赖于该物质点对之间的温度场，而与两点邻域内的其他物质点的温度场无关。在该假设条件下，热流密度可表示为

$$\underline{h}[\mathbf{x}, t] \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle = -\underline{h}[\mathbf{x}', t] \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}' \rangle \quad (3.37)$$

热响应函数可表示为

$$f_h(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) = \underline{h}[\mathbf{x}, t] \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle - \underline{h}[\mathbf{x}', t] \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}' \rangle = 2\underline{h}[\mathbf{x}, t] \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle \quad (3.38)$$

将式 (3.38) 代入式 (3.33) 可得键型 PD-DPL 模型的瞬态方程

$$\begin{aligned} \tau_q \rho c_v \ddot{T}(\mathbf{x}, t) + \rho c_v \dot{T}(\mathbf{x}, t) &= \int_{\mathcal{H}_x} f_h(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}'} + \tau_T \int_{\mathcal{H}_x} \dot{f}_h(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}'} \\ &+ s_b(\mathbf{x}, t) + \tau_q \dot{s}_b(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (3.39)$$

同样地，键型近场动力学热波模型的瞬态方程为

$$\tau_q \rho c_v \ddot{T}(\mathbf{x}, t) + \rho c_v \dot{T}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathcal{H}_x} f_h(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}'} + s_b(\mathbf{x}, t) + \tau_q \dot{s}_b(\mathbf{x}, t) \quad (3.40)$$

文献^[109, 120–122]中给出了不同的键型近场动力学的热响应函数 $f_h(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t)$ 的形式，其中以有理式居多。例如，Oterkus 等^[109]给出如下形式

$$f_h(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) = \underline{\kappa} \frac{T(\mathbf{x}', t) - T(\mathbf{x}, t)}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \quad (3.41)$$

其中 $\underline{\kappa}$ 是近场动力学微热导率 (thermal microconductivity)。Oterkus 等^[109]假设近场动力学扩散模型和经典傅里叶热传导模型，在线性温度场情况下具有相同的热势能，以此建立近场动力学微热导率 $\underline{\kappa}$ 与经典模型中的热导率 κ 之间的关系。在不同维度情况下， $\underline{\kappa}$ 可由 κ 表示为

$$\underline{\kappa} = \begin{cases} \frac{2\kappa}{A\ell^2} & \text{一维} \\ \frac{6\kappa}{\pi h\ell^3} & \text{二维} \\ \frac{6\kappa}{\pi\ell^4} & \text{三维} \end{cases} \quad (3.42)$$

其中, A 为一维杆的截面积, h 为二维板的厚度。

3.3 PD 非傅里叶热传导理论的数值实现

3.3.1 离散化和时间步进

为了能够数值求解近场动力学非傅里叶热传导方程, 需要分别对空间和时间进行离散化处理, 将一维到三维计算域分别离散为线形、方形和立方子域, 每个子域采用单点积分的方法, 假设温度场在每个子域为常数。更多关于近场动力学空间离散化的处理可参见 Kilic 的博士论文^[58]。式 (3.39) 的离散形式可表示为

$$\begin{aligned} \tau_{q(i)}\rho_{(i)}c_{v(i)}\ddot{T}_{(i)}(\mathbf{x},t) + \rho_{(i)}c_{v(i)}\dot{T}_{(i)}(\mathbf{x},t) = \sum_{j=1}^N (f_{h(i)(j)} + \tau_{T(i)}\dot{f}_{h(i)(j)})V_{(j)} \\ + \rho_{(i)}s_{b(i)} + \tau_{q(i)}\rho_{(i)}\dot{s}_{b(i)} \end{aligned} \quad (3.43)$$

其中 i 是积分点的编号, j 为积分点 i 邻域内任一点的编号, 且邻域内积分点的总数为 N ; $V_{(j)}$ 为与积分点 j 相关的子域的体积; 热响应函数 f_h 的离散形式为 $f_{h(i)(j)}$, 例如, 式 (3.41) 的离散形式为

$$f_{h(i)(j)} = \kappa \frac{T_{(j)} - T_{(i)}}{|\boldsymbol{\xi}_{(i)(j)}|} \quad (3.44)$$

其中参考构型中两物质点的初始相对位置 $\boldsymbol{\xi}_{(i)(j)} = \mathbf{x}_{(j)} - \mathbf{x}_{(i)}$ 。若式 (3.43) 和式 (3.44) 在第 n 次迭代的温度场为 $T_{(i)}^n = T_{(i)}$ ($t = n\Delta t$, 其中 Δt 为每次迭代的时间步长), 则式 (3.43) 可进一步表达为

$$\begin{aligned} \tau_{q(i)}\rho_{(i)}c_{v(i)}\ddot{T}_{(i)}^n(\mathbf{x},t) + \rho_{(i)}c_{v(i)}\dot{T}_{(i)}^n(\mathbf{x},t) = \sum_{j=1}^N (f_{h(i)(j)}^n + \tau_{T(i)}\dot{f}_{h(i)(j)}^n)V_{(j)} \\ + \rho_{(i)}s_{b(i)}^n + \tau_{q(i)}\rho_{(i)}\dot{s}_{b(i)}^n \end{aligned} \quad (3.45)$$

其中 $f_{h(i)(j)}^n = \kappa \frac{T_{(j)}^n - T_{(i)}^n}{|\boldsymbol{\xi}_{(i)(j)}|}$ 。

式 (3.45) 的时间积分可通过显式向前和向后差分技术进行计算。在第 n 次迭代中, 温度关于时间的二阶导数可由式 (3.45) 求得, 第 $n+1$ 次迭代的温度和温度变化率, 可通过显式向前和向后差分技术分两步实现。首先, 第 $n+1$ 次迭代的温度变化率可由第 n 次迭代的温度变化率和温度关于时间的二阶导数求得

$$\dot{T}_{(j)}^{n+1} = \dot{T}_{(j)}^n \Delta t + \ddot{T}_{(j)}^n \quad (3.46)$$

其次, 第 $n+1$ 次迭代的温度可通过第 n 次迭代的温度和第 $n+1$ 次迭代的温度变化率更新为

$$T_{(j)}^{n+1} = \dot{T}_{(j)}^{n+1} \Delta t + T_{(j)}^n \quad (3.47)$$

3.3.2 数值稳定性

上述时间积分方案是条件稳定的，为了确保得到收敛的数值结果，本小节将基于 von Neumann 稳定性分析^[54]方法，推导上述数值方法的稳定条件。假设任一积分点 j 第 n 次迭代的温度具有如下形式

$$T_{(j)}^n = \zeta^n e^{\Gamma j \sqrt{-1}} \quad (3.48)$$

其中波数 Γ 为正实数， ζ 为复数。稳定性分析要求对所有波数 Γ 有 $|\zeta| \leq 1$ 。假设单位质量的热能产生速率 s_b 为零，将式 (3.48) 代入式 (3.45) 得

$$\begin{aligned} & \frac{\tau_{q(i)} \rho_{(i)} c_{v(i)}}{\Delta t^2} (\zeta - 2 + \zeta^{-1}) + \frac{\rho_{(i)} c_{v(i)}}{\Delta t} (1 - \zeta^{-1}) \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{\kappa \left(e^{\Gamma(j-i)\sqrt{-1}} - 1 \right)}{|\xi_{(i)(j)}|} \left[1 + \frac{\tau_T}{\Delta t} (1 - \zeta^{-1}) \right] V_{(j)} \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{\kappa (\cos \Gamma(j-i) - 1)}{|\xi_{(i)(j)}|} \left[1 + \frac{\tau_T}{\Delta t} (1 - \zeta^{-1}) \right] V_{(j)} \\ &= - \left[1 + \frac{\tau_T}{\Delta t} (1 - \zeta^{-1}) \right] M_{\Gamma} \end{aligned} \quad (3.49)$$

其中

$$M_{\Gamma} = - \sum_{j=1}^N \frac{\kappa (\cos \Gamma(j-i) - 1)}{|\xi_{(i)(j)}|} V_{(j)} \quad (3.50)$$

由式 (3.49) 求解 ζ ，可得

$$\zeta = 1 - \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta t}{\tau_q} + \left(1 + \frac{\tau_T}{\Delta t} \right) \frac{M_{\Gamma} \Delta t^2}{\tau_q \rho_{(i)} c_{v(i)}} \mp \sqrt{\left[\frac{\Delta t}{\tau_q} + \left(1 + \frac{\tau_T}{\Delta t} \right) \frac{M_{\Gamma} \Delta t^2}{\tau_q \rho_{(i)} c_{v(i)}} \right]^2 - \frac{4M_{\Gamma} \Delta t^2}{\tau_q \rho_{(i)} c_{v(i)}}} \right] \quad (3.51)$$

令上式满足 $|\zeta| \leq 1$ 可得对时间步长的限制条件

$$\Delta t < \frac{\rho_{(i)} c_{v(i)}}{M_{\Gamma}} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{M_{\Gamma} \tau_T}{\rho_{(i)} c_{v(i)}} \right)^2 + \frac{4M_{\Gamma} \tau_q}{\rho_{(i)} c_{v(i)}}} - \left(1 + \frac{M_{\Gamma} \tau_T}{\rho_{(i)} c_{v(i)}} \right) \right] \quad (3.52)$$

由式 (3.50) 可得

$$M_{\Gamma} \leq \sum_{j=1}^N \frac{2\kappa}{|\xi_{(i)(j)}|} V_{(j)} = M_0 \quad (3.53)$$

结合式 (3.52) 和 (3.53) 可得上述 PD-DPL 数值离散模型的稳定性条件为

$$\Delta t < \frac{\rho_{(i)} c_{v(i)}}{M_0} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{M_0 \tau_T}{\rho_{(i)} c_{v(i)}} \right)^2 + \frac{4M_0 \tau_q}{\rho_{(i)} c_{v(i)}}} - \left(1 + \frac{M_0 \tau_T}{\rho_{(i)} c_{v(i)}} \right) \right] \quad (3.54)$$

如果 $\tau_T = 0$ ，由式 (3.54) 可得近场动力学热波模型的数值离散稳定性条件

$$\Delta t < \frac{\rho_{(i)} c_{v(i)}}{M_0} \left[\sqrt{1 + \frac{4M_0 \tau_q}{\rho_{(i)} c_{v(i)}}} - 1 \right] \quad (3.55)$$

3.3.3 算例验证

利用上述数值方案，本节选取三个算例来考察键型 PD 非傅里叶热传导模型及其数值计算框架的有效性：首先，分析平板太阳能收集器的吸收板温度场，针对温度和热对流两种边界条件分别建立一维到三维模型来验证键型近场动力学数值模型的有效性；其次，研究激光脉冲在金属材料微纳加工中的温度分布，并通过与传统热传导模型预测值和实验测量值对比验证 PD-DPL 模型的准确性；最后，用 PD-DPL 模型、近场动力学热波模型和 PD 热扩散模型预测含裂纹有限大板的温度场。

3.3.3.1 平板太阳能吸收板的非傅里叶热传导分析

平板太阳能收集器广泛应用于家庭热水供暖和空间加热^[123]，它们的作用是将吸收到的太阳能转化为工作流体的热能。由于吸收板的对称性，其中一半如示意图 3.3 所示，另一半关于左侧的 $y-z$ 平面对称。板的长宽高分别为 L_1, L_2 和 t_p 。假设吸收板表面的环境温度和太阳能通量是均匀的。对称边界表面施加绝热边界条件。右侧的表面与载流管相连^[123]，本算例中在右侧表面分别考虑恒温和对流两种边界条件。

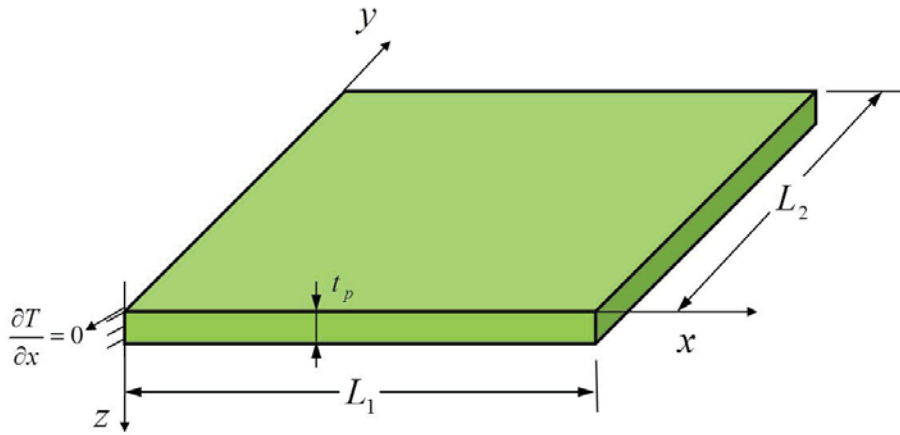


图 3.3 平板太阳能收集器的吸收板示意图

关于吸收板的瞬态热传导特性的研究，早期的分析以经典傅里叶热传导模型为主，近年来的一些研究考虑了吸收板的非傅里叶热传导过程^[123-125]。例如，Kundu 和 Lee^[123] 将图 3.3 所示问题简化为一维传统热波模型，假设各物理量仅沿 x 轴变化，求得了该模型的解析解。本节将基于 PD 热波模型研究图 3.3 所示问题，对于键型近场动

力学热波模型来说，吸收板的瞬态热传导方程为

$$\tau_q \rho c_v \ddot{T}(\mathbf{x}, t) + \rho c_v \dot{T}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathcal{H}_x} \kappa \frac{T(\mathbf{x}', t) - T(\mathbf{x}, t)}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} dV_{\mathbf{x}'} - \frac{U_L}{t_p} (T - T_a) + \frac{S}{t_p} \quad (3.56)$$

其中 U_L 为整体损失系数； S 为吸收板上的入射太阳能通量； T_a 为环境温度。上式的无量纲化形式为

$$V_e^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial F_0^2} + \frac{\partial \theta}{\partial F_0} = \int_{\mathcal{H}_x} \tilde{\kappa} \frac{\theta' - \theta}{|\mathbf{X}' - \mathbf{X}|} dV_{\mathbf{X}'} + S^* - Z_0^2 \theta \quad (3.57)$$

其中

$$\begin{aligned} Z_0 &= L_1 \sqrt{\frac{U_L}{k t_p}}, S^* = \frac{S L_1^2}{k (T_t - T_a) t_p}, C = \sqrt{\frac{\alpha}{\tau_q}}, F_0 = \frac{\alpha t}{L_1^2}, \tilde{\kappa} = \frac{\kappa}{\kappa} \\ V_e &= \frac{\tau_q C}{L_1}, \mathbf{X} = \frac{\mathbf{x}}{L_1}, \alpha = \frac{\kappa}{\rho c_p}, \theta = \frac{T - T_a}{T_t - T_a} \end{aligned} \quad (3.58)$$

其中， T_t 为左端边界 (图 3.3) 的给定温度，或给定对流边界的流体温度。式 (3.57) 中 $V_e = 0.2$, $S^* = 1.0$, $Z_0 = 0.5$ ，吸收板无量纲化后的尺寸为 $L_1^* = 1$, $L_2^* = 1$, $t_p^* = 0.1$ ，时间步长为 $\Delta F_0 = 2 \times 10^{-5}$ ，相邻物质点间的间距为 $\Delta X = \Delta Y = \Delta Z = 0.01$ ，非局部特征长度为 $\ell = 3.015 \Delta X$ 。基于式 (3.57)，分别建立吸收板的一维到三维近场动力学热波模型，其中一维模型为一个长度为 L_1 的杆；二维模型是一个长 L_1 、宽 L_2 的平面；三维模型是一个如图 3.3 所示的长方体。一维到三维模型的初始边界条件可统一表示为

$$\theta(\mathbf{X}, 0) = 0, \frac{\partial \theta(\mathbf{X}, 0)}{\partial F_0} = 0 \quad (3.59)$$

在近场动力学数值模拟中，除了右端边界外，所有的边界均为绝热边界条。右端分温度边界和对流边界两种情况，分别计算。所有的近场动力学数值模拟结果均和局部理论的一维解析解^[123]进行对比。

(1) 恒温边界条件

一维到三维近场动力学模型中右端界面的恒温边界条件分别为

$$\begin{aligned} 1D & \quad \frac{\partial \theta(0, F_0)}{\partial X} = 0, \theta(1, F_0) = 1 \quad F_0 > 0 \\ 2D & \quad \begin{cases} \frac{\partial \theta(0, Y, F_0)}{\partial X} = 0, \theta(1, Y, F_0) = 1 \\ \frac{\partial \theta(X, 0, F_0)}{\partial Y} = 0, \frac{\partial \theta(X, 1, F_0)}{\partial Y} = 0 \end{cases} \quad F_0 > 0 \\ 3D & \quad \begin{cases} \frac{\partial \theta(0, Y, Z, F_0)}{\partial X} = 0, \theta(1, Y, Z, F_0) = 1 \\ \frac{\partial \theta(X, 0, Z, F_0)}{\partial Y} = 0, \frac{\partial \theta(X, 1, Z, F_0)}{\partial Y} = 0 \\ \frac{\partial \theta(X, Y, 0, F_0)}{\partial Z} = 0, \frac{\partial \theta(X, Y, 0.1, F_0)}{\partial Z} = 0 \end{cases} \quad F_0 > 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

温度沿 x 方向的分布如图 3.4 所示，随着 F_0 的增加，温度不断升高直到在某一时刻 F_0 达到平衡状态，其中 $F_0 = 2.0$ 和 $F_0 = 5.0$ 的结果相差无几。由此可知在恒温条件下，

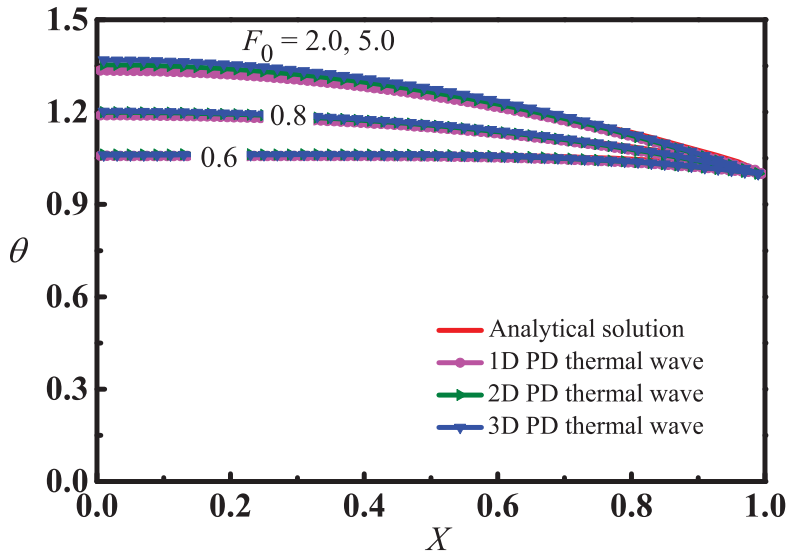


图 3.4 恒温边界条件下 PD 热波模型的温度场

系统存在平衡态。一维到三维近场动力学热波模型的结果在不同瞬时 $F_0 = 0.6, 0.8, 2.0$ 均与文献^[123]中的一维解析解一致。

(2) 热对流边界条件

一维到三维近场动力学模型中右端界面的热对流边界条件分别为

$$\begin{aligned}
 & \text{1D} \quad \frac{\partial \theta(0, F_0)}{\partial X} = 0, \theta(1, F_0) = -Bi_1(\theta - 1) \quad F_0 > 0 \\
 & \text{2D} \quad \begin{cases} \frac{\partial \theta(0, Y, F_0)}{\partial X} = 0, \theta(1, Y, F_0) = -Bi_1(\theta - 1) \\ \frac{\partial \theta(X, 0, F_0)}{\partial Y} = 0, \frac{\partial \theta(X, 1, F_0)}{\partial Y} = 0 \end{cases} \quad F_0 > 0 \\
 & \text{3D} \quad \begin{cases} \frac{\partial \theta(0, Y, Z, F_0)}{\partial X} = 0, \theta(1, Y, Z, F_0) = -Bi_1(\theta - 1) \\ \frac{\partial \theta(X, 0, Z, F_0)}{\partial Y} = 0, \frac{\partial \theta(X, 1, Z, F_0)}{\partial Y} = 0 \\ \frac{\partial \theta(X, Y, 0, F_0)}{\partial Z} = 0, \frac{\partial \theta(X, Y, 0.1, F_0)}{\partial Z} = 0 \end{cases} \quad F_0 > 0
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

其中 $Bi_1 = 0.5$ 。

温度沿 x 方向的分布如图 3.5 所示，类似于图 3.5 中的分析，随着 F_0 的增加，温度不断升高直到在某一时刻 F_0 时达到平衡状态，且在不同瞬时 $F_0 = 1, 2, 5, 10$ 均与文献^[123]中的一维解析解一致。

以上两个算例表明，一维到三维近场动力学热波模型的数值模拟结果均与一维解析解的结果一致，说明了上述数值方法的有效性。

3.3.3.2 激光脉冲下的金属薄膜热传导

激光脉冲加工技术在纳米级器件领域得到了广泛的应用。这些器件的热传导特性可能与傅里叶定律的预测有很大的不同（如下面的数值结果所示），这是由边界、界面散射及有限弛豫时间共同影响的结果^[126]。为此，研究者相继提出了用 Boltzmann 方

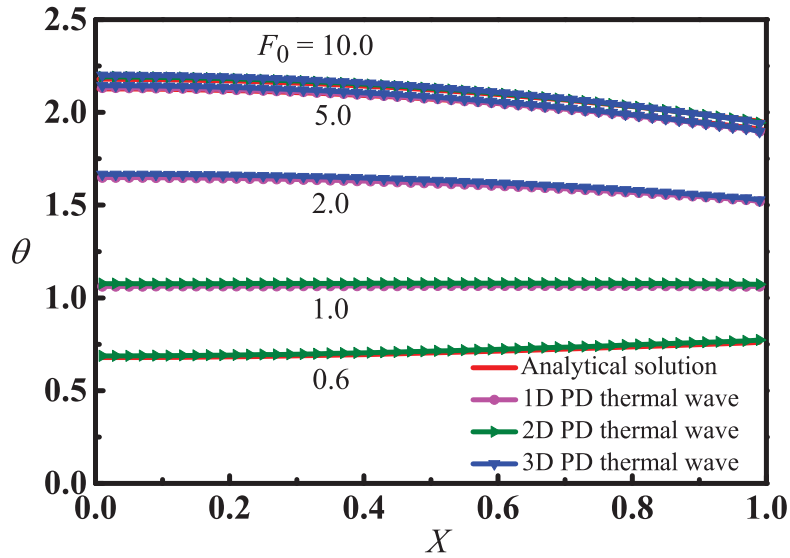


图 3.5 热对流边界条件下 PD 热波模型的温度场

程和 Ballistic-Diffusive 方程来分析纳米器件中的热传导问题，DPL 模型也广泛应用于微-纳米尺度的热传导分析。这里用 PD-DPL 模型来模拟如图 3.6 所示的激光脉冲照射下金属薄膜的温度分布，并与 Qiu 等^[127]得到的实验结果进行比较。

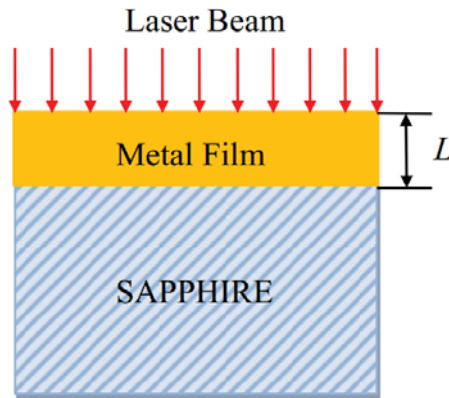


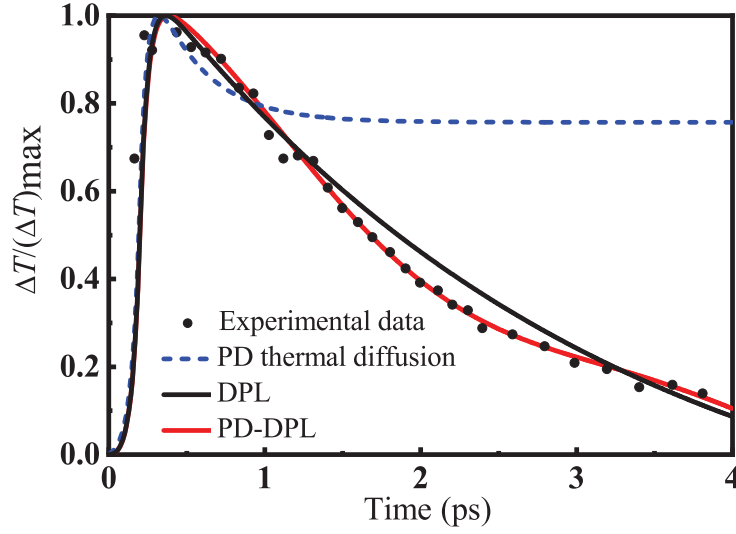
图 3.6 激光脉冲下金属薄膜示意图^[127]

图 3.6 所示，激光加热置于蓝宝石基底上的金属薄膜（金薄膜），通过测量薄膜上表面的反射能来表征上表面的温度变化。激光脉冲的形状可近似用高斯函数表示为^[127]

$$S(x, t) = 0.94J_0 \left(\frac{1-R}{t_0 l} \right) e^{-\frac{x}{l} - \frac{a|t-2t_0|}{t_0}} \quad (3.62)$$

其中激光能量密度为 $J_0 = 13.4 \text{ J/m}^2$ ，反射率 $R = 0.93$ ，辐射穿透深度 $l = 15.3 \times 10^{-9} \text{ m}$ ，激光脉冲的最大宽度 $t_0 = 100 \times 10^{-15} \text{ s}$ ，高斯函数的参数为 $a = 1.992$ 。

由于激光束的尺寸比激光穿透深度大得多，在经典 DPL 模型^[118]或两步模型^[128]中，图 3.6 中的薄膜-基底系统被近似为一维结构。我们在 PD-DPL 模型中仍采用该近


 图 3.7 厚度 $L = 20 \text{ nm}$ 的金属表面的温度随时间的变化

似，并将一维 PD-DPL 的瞬态传热方程表达为

$$\frac{\tau_q \partial^2 T}{\alpha \partial t^2} + \frac{\partial T}{\alpha \partial t} = \int_{\mathcal{H}_x} \frac{\kappa}{\kappa} \left(\frac{T' - T}{|x' - x|} + \tau_T \frac{T' - T}{|x' - x|} \right) dV_{x'} + \frac{1}{k} \left(S + \tau_q \frac{\partial S}{\partial t} \right) \quad (3.63)$$

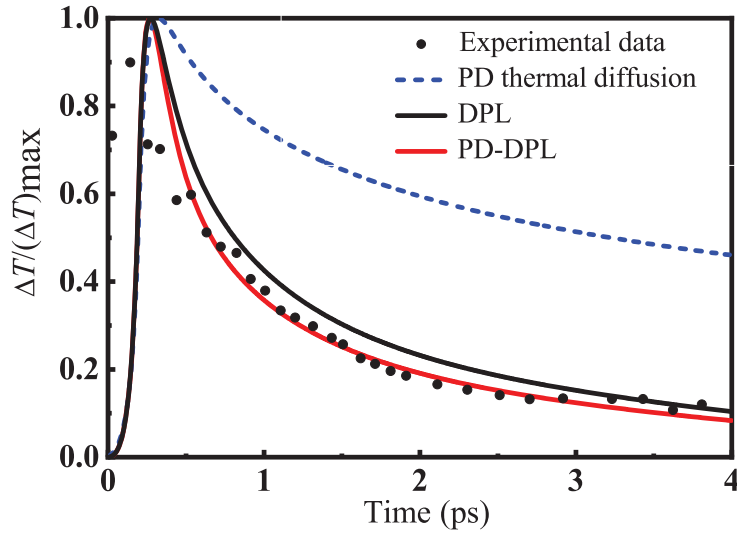
选取与文献 [118, 128] 相同的材料参数：热扩散系数 $\alpha = 1.2 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ ，导热系数 $\kappa = 315 \text{ W/mK}$ 。对厚度为 $L = 20 \text{ nm}$ 的金属薄膜，两个相位滞后分别为 $\tau_q = 8.5 \times 10^{-12} \text{ s}$ 和 $\tau_T = 4 \times 10^{-14} \text{ s}$ [128]；对厚度 $L = 100 \text{ nm}$ 的金属薄膜，两个相位滞后分别为 $\tau_q = 8.5 \times 10^{-12} \text{ s}$ 和 $\tau_T = 90 \times 10^{-14} \text{ s}$ [118]。在近场动力学模型的数值模拟中，时间步长为 $\Delta t = 2 \times 10^{-5} \text{ ps}$ ，相邻两物质点的间距为 $\Delta = L/100$ ，非局部特征长度为 $\ell = 0.25L$ ，初始条件和边界条件分别为

$$\begin{aligned} T(x, 0) &= T_0, \quad \frac{\partial T}{\partial t}(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t}(0, t) &= 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t}(L, t) = 0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

计算金属薄膜上表面 $x = 0$ 的温度随时间变化的情况，并将结果无量纲化为 $\Delta T / (\Delta T)_{\max}$ ，其中下标 ‘max’ 指温度变化记录过程中的最大值， $\Delta T = T - T_0$ 。分别用近场动力学热扩散、PD-DPL 模型和传统 DPL 模型来模拟以上两种薄膜厚度的温度场，结果如图 3.7 和 3.8 所示。

两种厚度情况下，PD-DPL 模型的结果均与实验值吻合较好。金属表面的温度总是先快速上升后下降，其中 20nm 金属薄膜的温度场下降速度较慢。这可能是由于不同厚度的金属薄膜表面有不同的热耗散条件。

而近场动力学热扩散模拟的预测结果与实验值差别很大。其温度场在快速上升后下降速度极其缓慢，甚至保持不变。可见近场动力学热扩散模型在纳米尺度下失效。而传统 DPL 的预测结果同样与实验值符合的较好 [118, 128]。


 图 3.8 厚度 $L = 100 \text{ nm}$ 的金属表面的温度随时间的变化

与传统的 DPL 模型相比，PD-DPL 模型的结果更接近实验值。尤其是对于 20 nm 的金属薄膜来说，PD-DPL 模型的结果无论是趋势还是具体值均与实验值一致，进而表明了激光脉冲加工过程中考虑空间非局部作用的重要性。

3.3.3.3 带有绝缘裂纹的板的热传导

为了表明近场动力学非傅里叶热传导模型处理不连续问题时的有效性，本算例选取了一个带绝缘裂纹的板如图 3.9 所示。其长为 $L = 2 \text{ cm}$ ，宽为 $W = 2 \text{ cm}$ ，裂纹的长度为 $2a = 1 \text{ cm}$ ，比热容为 $c_v = 1 \text{ J/(kgK)}$ ，热导率为 $\kappa = 1.14 \text{ W/(cm K)}$ ，质量密度为 $\rho = 1 \text{ kg/cm}^3$ 。初始条件和边界条件分别为

$$\begin{aligned} T(x, y, 0) = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t}(x, y, 0) = 0 \\ T(x, -W/2, t) = 100^\circ\text{C}, \quad T(x, W/2, t) = -100^\circ\text{C}, \quad t > 0 \\ \frac{\partial T}{\partial x}(-L/2, y, t) = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x}(L/2, y, t) = 0, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (3.65)$$

利用近场动力学热扩散模型、近场动力学热波模型和 PD-DPL 模型分别求解上述问题，其中相位滞后为 $\tau_q = 4 \times 10^{-6} \text{ s}$ ， $\tau_T = 0.004 \text{ s}$ 。

三种模型在 $x = 0$ 处的温度场计算结果如图 3.10 所示。在 $t = 0.1 \text{ s}$ 时，近场动力学热波模型和 PD-DPL 模型的计算结果明显不同于近场动力学热扩散模型。近场动力学热扩散模型中裂纹两侧的温度存在明显的变化，而前两种模型的结果基本保持不变。这充分说明了前两者模型中的热波速度为有限值，而近场动力学热扩散模型中，热波速度为无限大。此外，在近场动力学热波模型中存在明显的波动，而 PD-DPL 模型的结果却无此现象，较为光滑。该波动是由热波模型的性质造成的，传统热波模型中也存在类似的波动现象^[123]。该波动随着 τ_q 的减小而减弱，并最终趋于近场动力学热扩

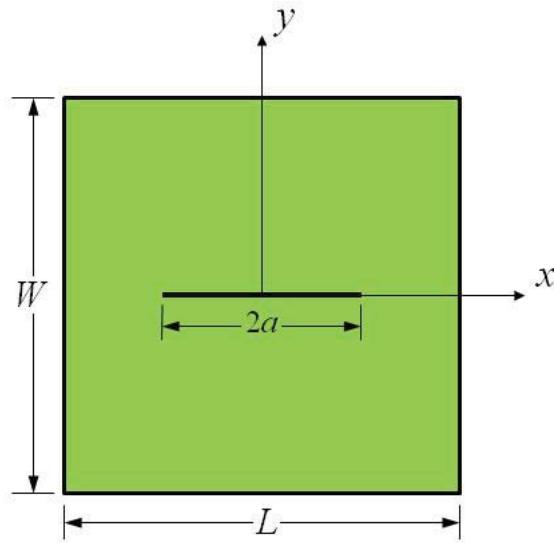


图 3.9 含有绝热裂纹的板

散模型的解。在 $t = 0.5 \text{ s}$ 时，三个模型的结果基本重合，说明非傅里叶效应对初始阶段的结果有非常重要的影响。

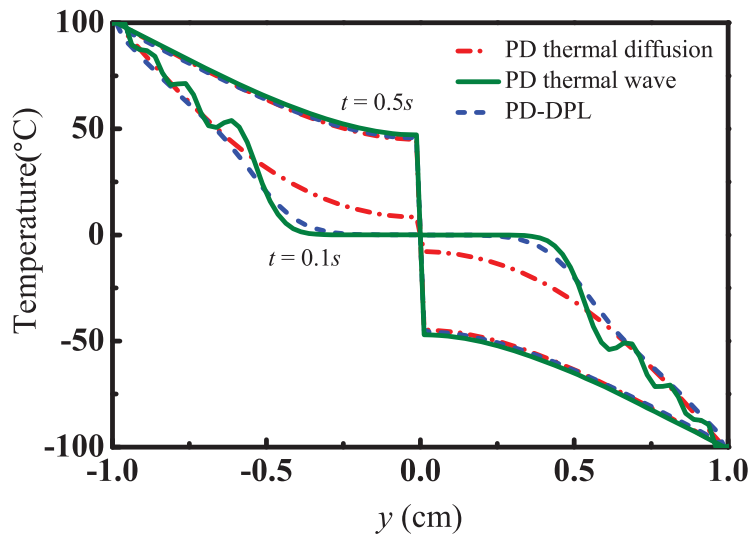


图 3.10 $x = 0$ 处的温度场

另外，三个模型在不同时刻的温度场如图 3.11 所示，其中等温线的间距反映了温度梯度的大小。在 $t = 0.1 \text{ s}$ 时，近场动力学热波模型、PD-DPL 模型和近场动力学热扩散模型的结果分别如图 3.11(a)、3.11(b)、3.11(c) 所示。在图 3.11(a) 和图 3.11(b) 中能明显看到波阵面位置，而图 3.11 (c) 中无此现象。这与图 3.10 中的分析一致，说明 PD 热波模型和 PD-DPL 模型中热波传播速度为有限值。图 3.11(a) 中波阵面附近的等温线间距非常小，说明此处存在极大的温度梯度，该现象在经典热波模型的结果中也存在。极大的温度跳跃给传统数值方法如有限元和有限差分等带来了极大的挑战，在瞬态模拟过程中可能需要重新划分网格^[129]，然而这一挑战对近场动力学热波模型来说并不

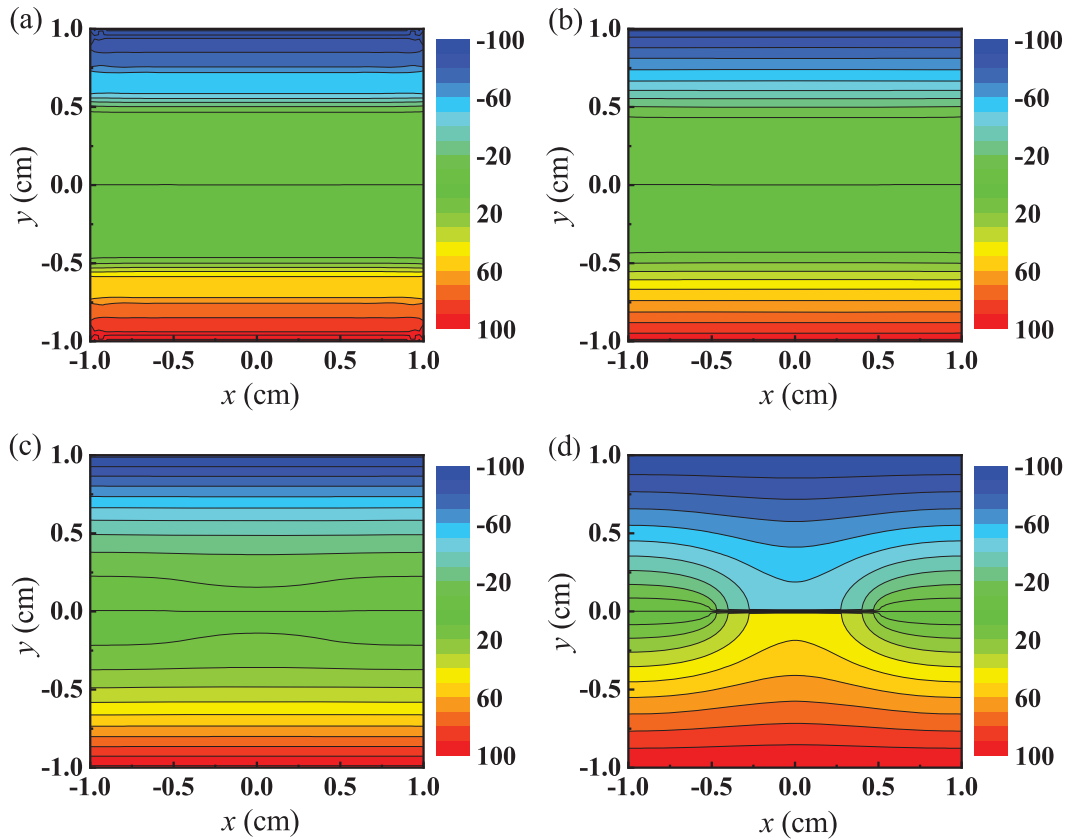


图 3.11 温度场: (a) PD 热波模型 ($t = 0.1$ s); (b) PD-DPL 模型 ($t = 0.1$ s); (c) PD 热扩散模型 ($t = 0.1$ s); (d) PD-DPL 模型 ($t = 0.5$ s)

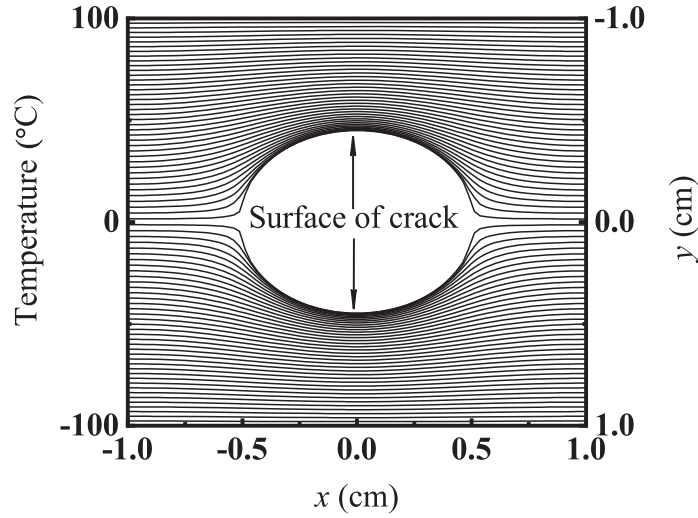
存在。由图 3.10 可知三种模型在 $t = 0.5$ s 的结果基本相等。为此，仅将 PD-DPL 模型在 $t = 0.5$ s 时的结果表示图 3.11(d)，其他两模型在 $t = 0.5$ s 时的结果基本与图 3.11(d) 一致。此时，等温线毫无意外地在裂纹尖端处集中。受 Silling^[6] 对裂纹尖端的位移场分析的启发，我们发现在温度场中也存在类似的比较有意思的现象，即近场动力学模型的等温线在裂尖处呈 cusp 的形状，如图 3.12 所示。而经典傅里叶热传导模型的等温线在裂尖处呈抛物线型，意味着在裂尖处的热流向量为无穷大，这不符合真实材料的物理规律。

3.4 PD 广义热弹性理论及其解的唯一性

本节在 PD-DPL 模型的基础上建立近场动力学广义热弹性理论并证明其解的唯一性。

3.4.1 预备知识

\mathcal{E}_3 为三维向量空间 \mathcal{V} 的仿射空间，参考构型 \mathcal{B} 为 \mathcal{E}_3 内任一封闭的有界子域， \mathcal{B} 中的任一元素定义为物质点。 \mathcal{B} 的任一运动 $\mathbf{y}(\cdot, \cdot)$ 均为一一映射： $\mathbf{y}: \mathcal{B} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{E}_3$ ，其


 图 3.12 $t = 0.5$ s 时 PD-DPL 模型的等温线分布

中 $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ 。 $\mathbf{y}(\cdot, t)$ 为参考构型 \mathcal{B} 在固定时刻 $t \in \mathbb{R}^+$ 的变形，则 $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$ 为物质点 \mathbf{x} 在时刻 t 的像，参考构型 \mathcal{B} 在时刻 t 的变形记作 $\mathcal{B}_t = \{\mathbf{y}(\mathbf{x}, t) | \mathbf{x} \in \mathcal{B}\}$ 。点 \mathbf{x} 在时刻 t 的位移为 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{x}$ 且 $\mathbf{u} \in L^2(\mathcal{V})$ 。定义在参考构型 \mathcal{B} 上的场被称为 Lagrangian 场。本节中所有的场均为 Lagrangian 场。本节将研究 \mathcal{B} 在热、力或者两者耦合作用下的热弹耦合响应的控制方程。

定义 3.4.1 (变形场) 物质点 \mathbf{x} 在时刻 t 的速度场、加速度场，以及外界环境施加的体力场分别为 $\dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)$ ， $\ddot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)$ ，和 $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$

$$\dot{\mathbf{y}}: \mathcal{B} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{V}, \quad \ddot{\mathbf{y}}: \mathcal{B} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{V}, \quad \mathbf{b}: \mathcal{B} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{V} \quad (3.66)$$

由物质点 \mathbf{x}' 施加的双力密度 (dual force density) (力/体积²) 为 $\mathbf{f}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t)$

$$\mathbf{f}: \mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{V} \quad (3.67)$$

其中 \mathbf{f} 满足

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t), \quad \forall \mathbf{x}', \mathbf{x} \in \mathcal{B}, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.68)$$

由上式， $\mathbf{f}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t)$ 也可表示为

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) = \mathbf{t}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) - \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t), \quad \forall \mathbf{x}', \mathbf{x} \in \mathcal{B}, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.69)$$

其中 $\mathbf{t}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t)$ 表示键力密度

$$\mathbf{t}: \mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{V} \quad (3.70)$$

向量函数 \mathbf{f} 和 \mathbf{t} 包含了近场动力学理论的本构信息，与变形 \mathbf{y} 相关。 \mathbf{f} 不仅仅表示真实存在的物理作用。由第二章的推导可知， \mathbf{f} 也可以是非均质材料的宏观性能的数学表征。基于定义 3.4.1，运动方程可由以下引理给出。

引理 3.4.1 (运动方程) 在体力 \mathbf{b} 的作用下, 由定义 3.4.1, 密度为 $\rho(\mathbf{x})$ 的参考构型 \mathcal{B} 的运动方程可表示为

$$\rho(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{y}}(\mathbf{x},t) = \int_{\mathcal{B}} [\mathbf{t}(\mathbf{x}',\mathbf{x},t) - \mathbf{t}(\mathbf{x},\mathbf{x}',t)] dV_{\mathbf{x}'} + \mathbf{b}(\mathbf{x},t), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}, t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.71)$$

上述引理的证明很简单, 方程 (3.71) 右端第一项表示参考构型内其他物质点对点 \mathbf{x} 作用力的合力, 则由牛顿第二定律很容易可得运动方程 (3.71)。接下来考虑参考构型的热行为。将热传导相关物理场定义如下。

定义 3.4.2 (温度场) $\Theta(\mathbf{x},t)$ 和 $S_Q(\mathbf{x},t)$ 分别为绝对温度和热源率

$$\Theta: \mathcal{B} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad S_Q: \mathcal{B} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.72)$$

双热流密度为 $f_Q(\mathbf{x}',\mathbf{x},t)$

$$f_Q: \mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.73)$$

f_Q 满足反对称性:

$$f_Q(\mathbf{x}',\mathbf{x},t) = -f_Q(\mathbf{x},\mathbf{x}',t), \quad \forall \mathbf{x}',\mathbf{x} \in \mathcal{B}, t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.74)$$

反对称的 $f_Q(\mathbf{x}',\mathbf{x},t)$ 可表示为

$$f_Q(\mathbf{x}',\mathbf{x},t) = q(\mathbf{x}',\mathbf{x},t) - q(\mathbf{x},\mathbf{x}',t), \quad \forall \mathbf{x}',\mathbf{x} \in \mathcal{B}, t \geq 0 \quad (3.75)$$

其中 $q(\mathbf{x}',\mathbf{x},t)$ 为单热流密度

$$q: \mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.76)$$

注 1 热流密度 $q(\mathbf{x}',\mathbf{x},t)$ 相当于经典傅里叶热传导中的热流向量。双热流密度 $f_Q(\mathbf{x}',\mathbf{x},t)$ 与 \mathbf{x}' 和 \mathbf{x} 之间, 及两点与各自邻域内的物质点之间的温度差相关。

引理 3.4.2 (热力学第一定律的局部形式) 假设 $\varepsilon(\mathbf{x},t)$ 为任一物质点 $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ 在时刻 t 的内能密度

$$\varepsilon: \mathcal{B} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.77)$$

由定义 3.4.1 和 3.4.2 中的拉格朗日场, 内能变化率 $\dot{\varepsilon}(\mathbf{x},t)$ 满足:

$$\dot{\varepsilon}(\mathbf{x},t) = p_{\text{abs}}(\mathbf{x},t) + Q_q(\mathbf{x},t) + S_Q(\mathbf{x},t), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}, t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.78)$$

其中单位体积内的变形能密度 p_{abs} 和热流 Q_q 分别为

$$p_{\text{abs}}(\mathbf{x},t) = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{t}(\mathbf{x}',\mathbf{x},t) \cdot (\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}',t) - \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t)) dV_{\mathbf{x}'}, \quad Q_q(\mathbf{x},t) = \int_{\mathcal{B}} f_Q(\mathbf{x}',\mathbf{x},t) dV_{\mathbf{x}'} \quad (3.79)$$

证明 考虑封闭有界参考构型 \mathcal{B} 内的任一子集 \mathcal{P} , 则在近场动力学理论框架内, 该子域的能量守恒定律^[61] 可表示为

$$\dot{\mathcal{E}}(\mathcal{P}) + \dot{\mathcal{K}}(\mathcal{P}) = \mathcal{W}_{\text{sup}}(\mathcal{P}) + \mathcal{Q}(\mathcal{P}), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.80)$$

其中上标 ‘.’ 表示 $\partial/\partial t$, \mathcal{E} 为子集 \mathcal{P} 的内能, \mathcal{K} 为动能; \mathcal{W}_{sup} 为外供能 (supplied power) 包括外力能及子集 \mathcal{P} 之外的参考构型中的其他物质点产生的势能, \mathcal{Q} 为输入系统的热能。它们分别定义为

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \int_{\mathcal{P}} \varepsilon dV \\ \mathcal{K} &= \int_{\mathcal{P}} \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{y}} \cdot \dot{\mathbf{y}} dV \\ \mathcal{W}_{\text{sup}} &= \int_{\mathcal{P}} \int_{\mathcal{B} \setminus \mathcal{P}} (\mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{y}}' - \mathbf{t}' \cdot \dot{\mathbf{y}}) dV' dV + \int_{\mathcal{P}} \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{y}} dV \\ \mathcal{Q} &= \int_{\mathcal{P}} \int_{\mathcal{B} \setminus \mathcal{P}} f_Q dV' dV + \int_{\mathcal{P}} S_Q dV\end{aligned}\quad (3.81)$$

为方便起见, 引入以下记号

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{y}' = \mathbf{y}(\mathbf{x}', t) \quad \mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t), \quad \mathbf{t}' = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) \\ \mathbf{b} &= \mathbf{b}(\mathbf{x}, t), \quad q = q(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t), \quad S_Q = S_Q(\mathbf{x}, t), \quad \rho = \rho(\mathbf{x}, t), \quad dV' = dV_{\mathbf{x}'}, \quad dV = dV_{\mathbf{x}}\end{aligned}\quad (3.82)$$

其中上标撇在本节中表示对应于物质点 \mathbf{x}' 的物理量。将式 (3.81) 代入式 (3.80) 可得

$$\int_{\mathcal{P}} (\dot{\varepsilon} - p_{\text{abs}} - Q_q - S_Q) dV + \int_{\mathcal{P}} \left(\rho \dot{\mathbf{y}} - \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{t} - \mathbf{t}') dV' - \mathbf{b} \right) \cdot \dot{\mathbf{y}} dV = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.83)$$

由运动方程 (3.71) 可知上式第二项为零, 则式 (3.83) 为

$$\int_{\mathcal{P}} (\dot{\varepsilon} - p_{\text{abs}} - Q_q - S_Q) dV = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.84)$$

假设式 (3.84) 对参考构型 \mathcal{B} 的任一子集均成立, 则可得热力学第一定律的局部形式

$$\dot{\varepsilon} = p_{\text{abs}} + Q_q + S_Q, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.85)$$

证毕。

假设以物质点 $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ 为中心, $l \in \mathbb{R}^+$ 为半径的物质点 $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ 的球形邻域为 $\mathcal{H}_{\mathbf{x}}$ 。定义向量集 $\mathcal{H} = \{\boldsymbol{\xi} \in (\mathcal{V} \setminus \mathbf{0}) | \boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in (\mathcal{H}_{\mathbf{x}} \cap \mathcal{B})\}$, 其中 $\boldsymbol{\xi}$ 为键向量。为了简化由物质点对 $(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ 到某些物质质量的映射, 引入态型近场动力学的有关概念。

定义 3.4.3 (“态”的概念) 设 \mathcal{L}_m 为 m 阶张量组成的集合, 则定义在 \mathcal{H} 上 m 阶“态”函数为: $\mathbf{A}(\cdot): \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L}_m$ 。尖括号 $\langle \cdot \rangle$ 内为键向量 $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{H}$ 。在时刻 $t \in \mathbb{R}^+$ 与物质点 $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ 相关的所有态函数构成态场 $\mathbf{A}[\mathbf{x}, t]$ 。两态场 $\mathbf{A}[\mathbf{x}, t]$ 和 $\mathbf{B}[\mathbf{x}, t]$ 的标量积定义为

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = \int_{\mathcal{H}} \mathbf{A}[\mathbf{x}, t] \langle \boldsymbol{\xi} \rangle \cdot \mathbf{B}[\mathbf{x}, t] \langle \boldsymbol{\xi} \rangle dV_{\boldsymbol{\xi}} \quad (3.86)$$

m 阶态场构成的集合记为 \mathcal{A}_m , 集合 \mathcal{A}_1 和 \mathcal{A}_0 分别表示向量态和标量态。关于“态”的性质具体可参见 Silling 和 Lehoucq 的综述文章^[8]。下面将给出一些常用的近场动力学“态”定义。

定义 3.4.4 (PD 中常用的“态”) 参考位置向量态 $\underline{\mathbf{X}} \in \mathcal{A}_1$ 、变形态 $\underline{\mathbf{Y}} \in \mathcal{A}_1$ 、力态 $\underline{\mathbf{T}} \in \mathcal{A}_1$ 、温差态 $\underline{\boldsymbol{\tau}} \in \mathcal{A}_0$ 和热流态 $\underline{\boldsymbol{q}} \in \mathcal{A}_0$ 分别定义为

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{X}}\langle\xi\rangle &= \xi \\ \underline{\mathbf{Y}}[\mathbf{x}, t]\langle\xi\rangle &= \mathbf{y}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x}', \mathbf{x} \in \mathcal{B}, t \in \mathbb{R}^+ \\ \underline{\mathbf{T}}[\mathbf{x}, t]\langle\xi\rangle &= \mathbf{t}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x}', \mathbf{x} \in \mathcal{B}, t \in \mathbb{R}^+ \\ \underline{\boldsymbol{\tau}}[\mathbf{x}, t]\langle\xi\rangle &= \Theta(\mathbf{x}', t) - \Theta(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x}', \mathbf{x} \in \mathcal{B}, t \in \mathbb{R}^+ \\ \underline{\boldsymbol{q}}[\mathbf{x}, t]\langle\xi\rangle &= q(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x}', \mathbf{x} \in \mathcal{B}, t \in \mathbb{R}^+\end{aligned}\tag{3.87}$$

态型近场动力学本构方程摒弃了经典热弹性理论中常用的应变、应力、温度梯度和热流向量等概念，将其分别替代为变形态 $\underline{\mathbf{Y}}$ 、力态 $\underline{\mathbf{T}}$ 、温差态 $\underline{\boldsymbol{\tau}}$ 和热流标量态 $\underline{\boldsymbol{q}}$ 。下面将在热力学框架下建立基于态型近场动力学的广义热弹性理论的本构方程。

3.4.2 PD 广义热弹性理论

基于上一节提出的 PD-DPL 热传导模型，结合热力学相关定律，建立近场动力学广义热弹性理论，记为 PD-DPL 热弹性理论。其解的唯一性将在随后的小节里给予证明。

首先，PD-DPL 热弹性理论应满足热力学第二定律的限制，即满足 Clausius-Duhem 不等式：

$$\Theta(\mathbf{x}, t)\dot{\eta}(\mathbf{x}, t) - Q_q(\mathbf{x}, t) - S_Q(\mathbf{x}, t) \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}, t \in \mathbb{R}^+\tag{3.88}$$

其中 $\eta(\mathbf{x}, t)$ 为时刻 $t \in \mathbb{R}^+$ 物质点 $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ 的单位体积内的熵密度。

广义 Helmholtz 自由能 ψ 定义为

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \varepsilon(\mathbf{x}, t) - \Theta(\mathbf{x}, t)\eta(\mathbf{x}, t), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}, t \in \mathbb{R}^+\tag{3.89}$$

为了方便起见，类似于式 (3.80)，所有函数描述中的 (\mathbf{x}, t) 在下文推导中将会被省略。假设自由能 ψ 依赖于独立变量 $\{\Theta, \underline{\mathbf{Y}}\}$ [61]，则自由能 ψ 可表示为

$$\psi = \Psi\{\Theta, \underline{\mathbf{Y}}\}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}, t \in \mathbb{R}^+\tag{3.90}$$

PD-DPL 模型中热传导本构关系满足式 (3.28)，即

$$\underline{\boldsymbol{q}}[\mathbf{x}, t + \tau_q] = \frac{\partial z(\underline{\boldsymbol{\tau}}[\mathbf{x}, t + \tau_T])}{\partial T(\mathbf{x}, t + \tau_T)} = \underline{\boldsymbol{h}}[\mathbf{x}, t + \tau_T] = \underline{\mathbf{A}} \bullet \underline{\boldsymbol{\tau}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+\tag{3.91}$$

其中 $\underline{\mathbf{A}}$ 为半正定的双重标量态，表征了材料的热传导率。由式 (3.91)、式 (3.75)、式 (3.79) 第二式可知

$$Q_q(t + \tau_q) = \int_{\mathcal{B}} f_h(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t + \tau_T) dV', \quad \forall t \in \mathbb{R}^+\tag{3.92}$$

其中， $f_h(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) = \underline{\boldsymbol{h}}[\mathbf{x}, t]\langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle - \underline{\boldsymbol{h}}[\mathbf{x}', t]\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}' \rangle$ 。为了在同一时刻下描述所有的物理

量, 将式 (3.92) 关于时间 t 泰勒展开可得

$$Q_q + \tau_q \dot{Q}_q = \int_{\mathcal{B}} [f_h(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) + \tau_T \dot{f}_h(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t)] dV' \quad (3.93)$$

定理 3.4.1 若同时满足 Clausius-Duhem 不等式 (3.88)、自由能定义 (3.89)、假设 (3.90) 和热传导本构关系 (3.93), 则 PD-DPL 广义热弹性理论的本构方程为

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{T}} &= \Psi_{\underline{\mathbf{Y}}} \\ \eta &= -\Psi_{\Theta} \\ \Theta \dot{\eta} &= Q_q + S_Q \end{aligned} \quad (3.94)$$

其中 Ψ_{Θ} 为 Ψ 关于 Θ 的导数; $\Psi_{\underline{\mathbf{Y}}}$ 为自由能 Ψ 关于 $\underline{\mathbf{Y}}$ 的 Fréchet 导数。PD-DPL 热弹性理论的热传导方程为

$$\tau_q \rho c_v \ddot{\Theta} + \rho c_v \dot{\Theta} = \int_{\mathcal{B}} [f_h(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) + \tau_T \dot{f}_h(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t)] dV' - \Theta \underline{\mathbf{B}} \bullet (\underline{\dot{\mathbf{Y}}} + \tau_q \ddot{\underline{\mathbf{Y}}}) + (S_Q + \tau_q S_Q) \quad (3.95)$$

其中比热容 $c_v = -\Theta \Psi_{\Theta\Theta} / \rho$, 热模量态 $\underline{\mathbf{B}} = -\Psi_{\Theta \underline{\mathbf{Y}}}$ 。

证明 式 (3.89) 关于时间求一阶导数可得

$$\dot{\psi} = \dot{\varepsilon} - \dot{\Theta} \eta - \Theta \dot{\eta}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}, t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.96)$$

将热力学第一定律 (3.78) 代入式 (3.96) 得

$$\dot{\psi} = p_{\text{abs}} + Q_q + S_Q - \dot{\Theta} \eta - \Theta \dot{\eta}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}, t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.97)$$

由式 (3.96)、(3.78) 和 (3.88) 得

$$\dot{\psi} + \dot{\Theta} \eta - p_{\text{abs}} \leq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}, t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.98)$$

将式 (3.90) 分别代入式 (3.97) 和式 (3.98), 可得

$$(\Psi_{\underline{\mathbf{Y}}} - \underline{\mathbf{T}}) \bullet \underline{\dot{\mathbf{Y}}} + (\Psi_{\Theta} + \eta) \dot{\Theta} + \Theta \dot{\eta} - Q_q - S_Q = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}, t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.99)$$

$$(\Psi_{\underline{\mathbf{Y}}} - \underline{\mathbf{T}}) \bullet \underline{\dot{\mathbf{Y}}} + (\Psi_{\Theta} + \eta) \dot{\Theta} \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}, t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.100)$$

由于 $\underline{\dot{\mathbf{Y}}}$ 和 $\dot{\Theta}$ 相互独立, 由式 (3.99) 可得本构方程:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{T}} &= \Psi_{\underline{\mathbf{Y}}} \\ \eta &= -\Psi_{\Theta} \\ \Theta \dot{\eta} &= Q_q + S_Q \end{aligned} \quad (3.101)$$

式 (3.101) 前两式确保了不等式 (3.100) 自然满足。由此本构方程 (3.94) 得证。

接下来证明热传导方程。将式 (3.101) 中的第二式代入式第三式可得

$$Q_q = \Theta \mathbf{B} \bullet \dot{\mathbf{Y}} + \rho c_v \dot{\Theta} - S_Q, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}, t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.102)$$

由式 (3.102) 和式 (3.93), 可得热传导方程为

$$\tau_q \rho c_v \ddot{\Theta} + \rho c_v \dot{\Theta} = \int_{\mathcal{B}} [f_h(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) + \tau_T \dot{f}_h(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t)] dV' - \Theta \mathbf{B} \bullet (\dot{\mathbf{Y}} + \tau_q \ddot{\mathbf{Y}}) + (S_Q + \tau_q S_Q) \quad (3.103)$$

证毕。

定理 3.4.2 假设 PD 理论框架内, 自由能具有如下形式^[130]

$$\psi = \Psi\{\Theta, \mathbf{Y}\} = \frac{1}{2} \mathbf{U} \bullet \mathbb{K} \bullet \mathbf{U} - \mathbf{B} \bullet \mathbf{U} T - \frac{\rho c_v}{2\Theta_0} T^2, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}, t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.104)$$

其中常数 Θ_0 为参考温度, $T = \Theta - \Theta_0$ 且 $|T/\Theta_0| \ll 1$, \mathbf{U} 为位移态且 $\mathbf{U} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}$ 。模量态 \mathbb{K} 为双重张量态 $\mathbb{K} = \mathbf{T}_{\mathbf{Y}}^0$, 表征了材料的刚度且是半定的^[8]。描述变形的本构方程为

$$\mathbf{T} = \mathbb{K} \bullet \mathbf{U} - \mathbf{B} T, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}, t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.105)$$

则运动方程 (3.71) 可重新表示为

$$\rho \ddot{\mathbf{y}} = \int_{\mathcal{B}} \{(\mathbb{K} \bullet \mathbf{U} - \mathbf{B} T)[\mathbf{x}, t] \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle - (\mathbb{K} \bullet \mathbf{U} - \mathbf{B} T)[\mathbf{x}', t] \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}' \rangle\} dV' + \mathbf{b}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}, t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.106)$$

将式 (3.104) 代入式 (3.101) 第一式即可证明 (3.105)。将本构关系 (3.105) 代入运动方程 (3.71) 即得式 (3.106)。为了使方程 (3.106) 和方程 (3.95) 中的变量统一, 我们将热传导方程表示为关于相对温度 T 的方程

$$\tau_q \rho c_v \ddot{T} + \rho c_v \dot{T} = \int_{\mathcal{B}} [f_h(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) + \tau_T \dot{f}_h(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t)] dV' - \Theta_0 \mathbf{B} \bullet (\dot{\mathbf{Y}} + \tau_q \ddot{\mathbf{Y}}) + (S_Q + \tau_q S_Q) \quad (3.107)$$

其中已用到近似 $\Theta_0 \approx \Theta$ 。

方程 (3.106) 和方程 (3.107) 共同组成了热弹系统的控制方程, 其中热行为和变形行为分别由 PD-DPL 热传导理论和线性化态型 PD 理论来描述。特别地, 当 $\tau_T = 0$ 时, 热传导方程类似于 Lord-Shulman 广义热弹性理论^[90] 的热传导方程, 此时的 PD-DPL 热弹性理论记作 PD-LS 热弹性理论。若 $\tau_q = \tau_T = 0$, 则热传导方程退化为 PD 热扩散方程^[109], PD-DPL 热弹性理论退化为 Oterkus 等提出的 PD 热弹性理论^[130], 为了避免概念上的歧义, 称其为 PD-TD 热弹性理论。基于 PD 框架的三种热弹性理论: PD-DPL 广义热弹性理论、PD-LS 广义热弹性理论和 PD-TD 热弹性理论, 均是非局部热弹性理论。其中前两者同时具有特征时间和特征长度, 为时空非局部理论, 最后一种仅有特征长度, 为空间非局部理论。三者特征长度趋于零时, 可分别退化为经典的 DPL 广义热弹性理论、LS 广义热弹性理论和经典热弹性理论。

3.4.3 唯一性定理

定义 3.4.5 (初始边值问题) 热弹耦合控制方程为

$$\begin{cases} \rho \ddot{\mathbf{y}} = \int_{\mathcal{B}} \{ (\underline{\mathbb{K}} \bullet \underline{\mathbf{U}} - \underline{\mathbf{B}}T) [\mathbf{x}, t] \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle - (\underline{\mathbb{K}} \bullet \underline{\mathbf{U}} - \underline{\mathbf{B}}T) [\mathbf{x}', t] \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}' \rangle \} dV' + \mathbf{b}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_u^* \\ \tau_q \rho c_v \ddot{T} + \rho c_v \dot{T} = \int_{\mathcal{B}} [f_h(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) + \tau_T \dot{f}_h(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t)] dV' - \Theta_0 \underline{\mathbf{B}} \bullet (\underline{\dot{\mathbf{Y}}} + \tau_q \underline{\dot{\mathbf{Y}}}) + (S_Q + \tau_q S_Q), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_T^* \end{cases} \quad (3.108)$$

边界条件为

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{y}^*, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}_u^* \\ T &= T^*, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}_T^* \end{aligned} \quad (3.109)$$

初始条件为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{y}_0(\mathbf{x}, 0), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_u^* \\ \dot{T}(\mathbf{x}, 0) &= T_0(\mathbf{x}, 0), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_T^* \end{aligned} \quad (3.110)$$

其中 $\mathcal{B}_u^* \subset \mathcal{B}$, $\mathcal{B}_T^* \subset \mathcal{B}$; \mathbf{y}^* 、 T^* 、 \mathbf{y}_0 和 T_0 为已知函数。

定理 3.4.3 定义 3.4.5 描述的初始边值问题在 $\mathcal{B} \times \mathbb{R}^+$ 范围内最多有一个容许解。

证明 假设初始边值问题有两组解 $\{\mathbf{u}^{(1)}, T^{(1)}\}$ 和 $\{\mathbf{u}^{(2)}, T^{(2)}\}$ 。由于线性方程满足叠加定理，两组解的差 $\{\mathbf{u}^{(c)} = \mathbf{u}^{(2)} - \mathbf{u}^{(1)}, T^{(c)} = T^{(2)} - T^{(1)}\}$ ，满足初始值、边界值、体力和热源均为零的控制方程 (3.108)。对两组解的差 $\{\mathbf{u}^{(c)}, T^{(c)}\}$ 施加线性算子 \mathcal{L}_q 且 $\mathcal{L}_q = 1 + \tau_q \partial / \partial t$ ，则得到的一组解 $\{\mathbf{u}^{(d)} = \mathcal{L}_q[\mathbf{u}^{(c)}], T^{(d)} = \mathcal{L}_q[T^{(c)}]\}$ 同样满足解 $\{\mathbf{u}^{(c)}, T^{(c)}\}$ 所满足的控制方程和条件。

解 $\{\mathbf{u}^{(d)}, T^{(d)}\}$ 也满足本构方程 (3.105)、热传导定律 (3.93)、线性化能量守恒方程 (3.103):

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{T}}^{(d)} &= \underline{\mathbb{K}} \bullet \underline{\mathbf{U}}^{(d)} - \underline{\mathbf{B}}T^{(d)} \\ Q_q^{(d)} &= \int_{\mathcal{B}} \mathcal{L}_T [f_h^{(d)}] dV' \\ \Theta_0^{-1} Q_q^{(d)} &= \underline{\mathbf{B}} \bullet \underline{\dot{\mathbf{Y}}}^{(d)} + \frac{\rho c_v}{\Theta_0} \dot{T}^{(d)} \end{aligned} \quad (3.111)$$

其中绝对温度 Θ 已经替换为 T 且 $\mathcal{L}_T = 1 + \tau_T \partial / \partial t$ 。

将式 (3.111) 第一式乘以 $\underline{\dot{\mathbf{U}}}^{(d)}$ ，式 (3.111) 第三式乘以 $T^{(d)}$ ，两者相加，并关于整个参考构型 \mathcal{B} 积分可得

$$\int_{\mathcal{B}} \underline{\mathbf{T}}^{(d)} \bullet \underline{\dot{\mathbf{U}}}^{(d)} dV + \Theta_0^{-1} \int_{\mathcal{B}} Q_q^{(d)} T^{(d)} dV = \underline{\mathbf{U}}^{(d)} \bullet \underline{\mathbb{K}} \bullet \underline{\dot{\mathbf{U}}}^{(d)} + \int_{\mathcal{B}} \frac{\rho c_v}{\Theta_0} \dot{T}^{(d)} T^{(d)} dV \quad (3.112)$$

其中最后一项的积分可表示为

$$\int_{\mathcal{B}} \frac{\rho c_v}{\Theta_0} \dot{T}^{(d)} T^{(d)} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{B}} \frac{\rho c_v}{2\Theta_0} (T^{(d)})^2 dV \quad (3.113)$$

由于态 $\underline{\mathbb{K}}$ 的自伴随，可得

$$\underline{\mathbf{U}}^{(d)} \bullet \underline{\mathbb{K}} \bullet \dot{\underline{\mathbf{U}}}^{(d)} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \underline{\mathbf{U}}^{(d)} \bullet \underline{\mathbb{K}} \bullet \underline{\mathbf{U}}^{(d)} \right) \quad (3.114)$$

另外有

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \underline{\mathbf{T}}^{(d)} \bullet \dot{\underline{\mathbf{U}}}^{(d)} dV &= \int_{\mathcal{B}} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{t}^{(d)} \cdot \left(\dot{\mathbf{u}}^{(d)} - \dot{\mathbf{u}}^{(d)} \right) dV' dV = \int_{\mathcal{B}} \int_{\mathcal{B}} \left(\mathbf{t}'^{(d)} - \mathbf{t}^{(d)} \right) \cdot \dot{\mathbf{u}}^{(d)} dV' dV \\ &= - \int_{\mathcal{B}} \rho \dot{\mathbf{u}}^{(d)} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{(d)} dV = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} \rho \left(\dot{\mathbf{u}}^{(d)} \right)^2 dV \end{aligned} \quad (3.115)$$

其中在第二个等式中用到了 $\int_{\mathcal{B}} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{t}^{(d)} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{(d)} dV' dV = \int_{\mathcal{B}} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{t}'^{(d)} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{(d)} dV' dV$ ，该式通过交换变量 \mathbf{x}' 和 \mathbf{x} 可得；第三个等式中用到了运动方程 (3.71)。结合式 (3.75) 和 (3.87) 的最后一式，式 (3.112) 的第二项可做如下处理

$$\begin{aligned} \Theta_0^{-1} \int_{\mathcal{B}} Q_q^{(d)} T^{(d)} dV &= \Theta_0^{-1} \int_{\mathcal{B}} \int_{\mathcal{B}} \mathcal{L}_T \left[f_h^{(d)} \right] T^{(d)} dV' dV \\ &= \Theta_0^{-1} \int_{\mathcal{B}} \int_{\mathcal{B}} \mathcal{L}_T \left[h_s^{(d)} - h_s'^{(d)} \right] T^{(d)} dV' dV \\ &= - \Theta_0^{-1} \int_{\mathcal{B}} \int_{\mathcal{B}} \mathcal{L}_T \left[h_s^{(d)} \right] \left(T'^{(d)} - T^{(d)} \right) dV' dV \\ &= - \Theta_0^{-1} \underline{\boldsymbol{\tau}}^{(d)} \bullet \underline{\mathbb{A}} \bullet \underline{\boldsymbol{\tau}}^{(d)} - \Theta_0^{-1} \tau_T \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \underline{\boldsymbol{\tau}}^{(d)} \bullet \underline{\mathbb{A}} \bullet \underline{\boldsymbol{\tau}}^{(d)} \right] \end{aligned} \quad (3.116)$$

其中 $h_s^{(d)} = \underline{h}^{(d)}[\mathbf{x}, t] \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle$ ， $h_s'^{(d)} = \underline{h}^{(d)}[\mathbf{x}', t] \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}' \rangle$ 。将式 (3.113)-(3.116) 代入式 (3.112) 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_{\mathcal{B}} \frac{\rho c_v}{2\Theta_0} \left(T^{(d)} \right)^2 dV + \frac{\rho c_v}{2\Theta_0} \left(T^{(d)} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho \left(\dot{\mathbf{u}}^{(d)} \right)^2 dV + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{U}}^{(d)} \bullet \underline{\mathbb{K}} \bullet \underline{\mathbf{U}}^{(d)} + \frac{\tau_T}{2\Theta_0} \underline{\boldsymbol{\tau}} \bullet \underline{\mathbb{A}} \bullet \underline{\boldsymbol{\tau}} \right\} \\ = - \Theta_0^{-1} \underline{\boldsymbol{\tau}} \bullet \underline{\mathbb{A}} \bullet \underline{\boldsymbol{\tau}} \end{aligned} \quad (3.117)$$

由于 $\underline{\mathbb{A}}$ 的半正定性，式 (3.117) 右边为非正的，即

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_{\mathcal{B}} \frac{\rho c_v}{2\Theta_0} \left(T^{(d)} \right)^2 dV + \frac{\rho c_v}{2\Theta_0} \left(T^{(d)} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho \left(\dot{\mathbf{u}}^{(d)} \right)^2 dV + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{U}}^{(d)} \bullet \underline{\mathbb{K}} \bullet \underline{\mathbf{U}}^{(d)} + \frac{\tau_T}{2\Theta_0} \underline{\boldsymbol{\tau}} \bullet \underline{\mathbb{A}} \bullet \underline{\boldsymbol{\tau}} \right\} \leq 0 \quad (3.118)$$

上式表明左边括号里的总积分是随着时间减小或者一致等于零（初始值为零）。 $\underline{\mathbb{K}}$ 和 $\underline{\mathbb{A}}$ 是半正定的，其它项均为平方项，则对所有的 $\forall t > 0$ ，积分均为零，即

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(d)} = 0 &\Rightarrow \mathbf{u}^{(c)} + \tau_q \dot{\mathbf{u}}^{(c)} = 0 \Rightarrow \mathbf{u}^{(c)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^{(c)}(\mathbf{x}, 0) e^{-t/\tau_q} \\ T^{(d)} = 0 &\Rightarrow T^{(c)} + \tau_q \dot{T}^{(c)} = 0 \Rightarrow T^{(c)}(\mathbf{x}, t) = T^{(c)}(\mathbf{x}, 0) e^{-t/\tau_q} \end{aligned} \quad (3.119)$$

由零初始条件

$$\mathbf{u}^{(c)}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}, \quad T^{(c)}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad (3.120)$$

可得

$$\mathbf{u}^{(c)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}, \quad T^{(c)}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.121)$$

因此集合 $\{\mathbf{u}^{(c)}, T^{(c)}\}$ 中的所有元素为零，唯一性定理得证。

3.5 本章小结

本章首先基于复合圆柱模型，探讨了时空耦合非局部热弹性理论的起源，并在此结论的基础上，建立了适用于不连续和超常规热力耦合问题的近场动力学非傅里叶热传导模型和近场动力学广义热弹性模型，主要研究工作和结论总结如下：

(1) 非均质材料的宏观热弹性能的控制方程中，惯性项、非惯性项及热力耦合项均含有时空耦合非局部项。若在推导过程中不考虑惯性项的影响，时空耦合非局部项均可退化为空间非局部项。在解耦状态下，变形方程与上一章的方程保持一致，热传导方程可通过不同的近似手段分别近似为近场动力学热扩散模型和经典的 DPL 模型。两者分别属于空间非局部和时间非局部模型。简单的静态力平衡和稳态热传导算例表明非局部项能自然捕捉到经典局部方程无法轻易计算出的边界效应。

(2) 发展了基于近场动力学理论框架的非傅里叶热传导模型，该模型同时具有时间和空间特征尺度，是一种时空耦合非局部热传导理论，易于处理不连续问题和极端环境下的超常规传热问题。随后又建立了该模型的数值计算框架，并通过数值算例验证了该数值计算框架的有效性。与实验数据对比表明，较之于已有的近场动力学热扩散模型以及经典的 DPL 热传导模型，该模型更加与实验数据相符合；对含绝缘裂纹板的温度场分析表明，该模型的结果在裂纹尖端不具有奇异性。通常情况下经典傅里叶热传导理论或经典非傅里叶热传导理论（DPL 模型、热波模型等）的最终稳态解是一致的。在裂纹尖端的热流向量均为无限大，而由于非局部特征长度的引入，近场动力学热扩散模型及本节提出的近场动力学非傅里叶热传导模型预测的裂尖热流向量为有限值。

(3) 建立了热弹性分析的近场动力学广义热弹性模型，该模型同样是一种适用于不连续问题的时空耦合非局部热弹性模型。证明了该模型初-边值问题解的唯一性，即该模型的初-边值问题至多有一个解。

第四章 近场动力学的格林函数解

4.1 引言

近场动力学 (PD) 作为位移积分型非局部理论的典型代表, 几近是唯一代表, 自 2000 年提出以来已得到科学界和工程界的广泛关注。目前 PD 相关的研究主要以数值计算和应用模拟为主, 而关于其理论的基本问题如基本解、动态特性等方面的研究相对匮乏, 且在为数不多的研究中以键型 PD 为主。例如, 在首篇提出 PD 的文章中 Silling^[6] 就解析地得到了特殊条件下 (假设波的传播方向沿某一坐标轴方向) 键型 PD 的色散关系, 该色散关系表现出非线性, 呈色散特性。随后, Weckner 和 Abeyaratne^[56] 在一维键型 PD 的框架下, 系统地研究了 PD 弹性杆的动态特性, 其中包括解析的色散关系、无限大域初值问题的一般解、间断条件和不连续位移场的演化。与此同时, Zimmermann^[131] 比较了一维键型 PD、Eringen 理论和高阶理论的色散关系。直到 2009 年, 三维键型 PD 的格林函数才由 Weckner 等^[132] 解析地给出。他们指出由积分逆变换直接得到的格林函数的积分是发散的, 该发散积分可表达成一个收敛积分和一个 Dirac 函数之和。Mikata^[105] 在求解弹性杆在两点集中载荷下响应的解析解时, 仍采用了类似 Weckner 等^[132] 的分解方法。除了以上解析方法外, 也有一些关于键型 PD 的色散关系或波传播的数值研究^[86, 133, 134]。以上提到的研究均是关于键型 PD 的, 相较于键型 PD, 态型 PD 动态特性的研究更是少之又少。例如, Bažant 等^[135] 给出了一维态型 PD 色散关系的解析形式。Butt 等^[136] 利用数值手段分析了一维到三维态型 PD 的色散关系和波传播特性, 并且在二维、三维中采用与 Silling^[6] 相同的假设, 即波沿某一坐标轴方向传播。

另一方面, PD 思想已被推广至扩散领域。Gerstle 等^[120]、Bobaru 和 Duangpanya^[121, 122]、Oterkus 等^[109]、Chen 和 Bobaru^[137] 先后提出了 PD 的扩散模型, 将 PD 推广至热力学耦合、热扩散、金属腐蚀等领域的模拟中。Chen 和 Bobaru^[138] 对比了 PD 扩散模型在不同核函数下数值计算结果, 分析了不同核函数的收敛性问题。此外, Gunzburger 和 Lehoucq^[139] 给出了稳态 PD 扩散模型的格林函数形式的一般解, 但并未进一步求解出格林函数。除此以外, 关于 PD 扩散模型的解析解方面的研究几乎空白。

由以上研究现状可知, 一方面, 态型 PD 的基本解、色散关系和动态特性等基本问题的解析形式还未有相关报道; 另一方面, 除了 Gunzburger 和 Lehoucq^[139] 的工作以外, 关于 PD 扩散模型的解析解方面的研究几乎空白。而基本问题的研究往往是理论的立足之本, 解析解方面的工作对定性分析核函数、非局部特征长度等因素的影响发挥着直接、有效、快捷的作用。针对这一现状, 本节将集中于 PD 理论基本问题的研究,

包括线性化态型 PD 的动态特性和 PD 热扩散模型的格林函数解两部分内容。

4.2 态型 PD 的动态特性

PD 理论的动态特性直接决定了 PD 材料的动态响应。从上一节的研究现状可知, 自 PD 的第一篇文章^[6]发表以来, 动态特性的研究一直很受关注, 但有关态型 PD 动态特性的研究仍极其匮乏。一方面是由于态型 PD^[8]发展较晚, 2007 年态型 PD 才被提出, 其理论框架到 2010 年才见雏形; 另一方面态型 PD 相比于键型 PD 较为复杂, 其动态特性的理论研究极其困难。至今除一维情况外未看到态型 PD 动态特性理论方面的研究。值得庆幸的是, 线性化态型 PD^[140,141]的提出让我们看到了解决这一困境的曙光。本节将在线性化态型 PD 的基础上, 探讨态型 PD 给出的弹性波的色散关系、群速度、相速度、无界域初值问题的格林函数法及基本解、间断条件及不连续场的演化。为此, 将线性化态型 PD 理论简要回顾如下。

Le 和 Bobaru^[142]按照是否满足刚体旋转不变性这一客观性, 将现有态型 PD 模型分为客观性和非客观性两类。本文用到的线性化态型 PD^[140,141]属于前者。对于无界参考构型 \mathcal{B} 内的任一物质点 \mathbf{x} , 线性化态型 PD 的控制方程^[140,141]为

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}(\mathbf{q}, t)) dV_{\mathbf{q}} + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (4.1)$$

式中响应函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))$ 为

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}(\mathbf{q}, t)) = \mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{q}) \cdot [\mathbf{u}(\mathbf{q}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] \quad (4.2)$$

其中, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ 和 $\mathbf{u}(\mathbf{q}, t)$ 分别为 t 时刻物质点 \mathbf{x} 和物质点 \mathbf{q} 的位移; \mathbf{b} 为体力; ρ 为密度。响应函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}(\mathbf{q}, t))$ 表征了物质点 \mathbf{x} 和 \mathbf{q} 之间的相互作用, 包含了材料的所有本构信息, 其中二阶张量 $\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ 被称为“微模量 (micromodulus) 张量”。

对于均匀各向同性材料, 微模量张量 $\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ 可表示为

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = \beta_s \int_{\mathcal{B}} w(|\mathbf{p} - \mathbf{x}|) w(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|) (\mathbf{p} - \mathbf{x}) \otimes (\mathbf{p} - \mathbf{q}) dV_{\mathbf{p}} + 2\gamma_s (\mathbf{q} - \mathbf{x}) \quad (4.3)$$

式中, $w(|\boldsymbol{\xi}|)$ 为权函数, 其中包含了非局部特征长度 ℓ 。在参考构型中以任一物质点为中心, 以 ℓ 为半径的区域称为该物质点的“非局部邻域”。

$$\gamma_s(\boldsymbol{\xi}) = \alpha_s w(|\boldsymbol{\xi}|) \left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|} \otimes \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|} \right) \quad (4.4)$$

其中, $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{q} - \mathbf{x}$; β_s 和 α_s 为材料常数。对于三维问题有^[140]

$$\beta_s = \frac{9\mu}{m_s^2} \frac{1-4\nu}{1-2\nu}, \quad \alpha_s = \frac{15\mu}{m_s}, \quad m_s = \int_{\mathcal{B}} w(|\boldsymbol{\xi}|) |\boldsymbol{\xi}|^2 dV_{\boldsymbol{\xi}} \quad (4.5)$$

其中, μ 和 ν 分别为剪切模量和泊松比。对于二维问题有^[141]

$$\beta_s = \begin{cases} \frac{4\mu}{m_s^2} \frac{1-3\nu}{1-\nu}, & \text{平面应力} \\ \frac{4\mu}{m_s^2} \frac{1-4\nu}{1-2\nu}, & \text{平面应变} \end{cases}, \quad \alpha_s = \frac{8\mu}{m_s}, \quad m_s = \int_{\mathcal{B}} w(|\xi|) |\xi|^2 dA_{\xi} \quad (4.6)$$

对于一维问题参数选取不唯一^[62,136], 但均满足当非局部特征长度 ℓ 趋于零时可退化为经典方程的原则。本文中采用 Madenci 和 Oterkus 书^[62] 中的选取方式, 即

$$\beta_s = 0, \quad \alpha_s = \frac{E}{2m_s}, \quad m_s = \int_{\mathcal{B}} w(|\xi|) |\xi|^2 d\xi \quad (4.7)$$

注意到, 式 (4.3) 中二阶张量 $\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ 包含两项: 第一个积分项表示物质点 \mathbf{x} 和 \mathbf{q} 通过中间点 \mathbf{p} 存在的“间接”相互作用, \mathbf{x} 和 \mathbf{q} 均在物质点 \mathbf{p} 的非局部邻域内; 第二项描述了 \mathbf{x} 和 \mathbf{q} 的“直接”相互作用, 与键型 PD 具有相同的形式和意义。键型 PD 可看作是态型 PD 的特殊情况。例如对于三维问题, 当泊松比 $\nu = 1/4$ 时, 二阶张量 $\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ 第一项系数为零, 此时态型 PD 完全等价于键型 PD。因此, 本节讨论态型 PD 用到的方法和结论同样适用于键型 PD。

此外, 无界参考构型 \mathcal{B} 的初始条件为

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) \quad (4.8)$$

其中, \mathbf{u}_0 和 $\dot{\mathbf{u}}_0$ 分别为初始位移和初始速度。

4.2.1 动态基本特性

本小节将分析线性化态型 PD 的基本动态特性, 包括弹性波的色散关系、群速度和相速度。为了便于分析, 我们引入变量 $\zeta := \mathbf{p} - \mathbf{x}$ 和 $\xi := \mathbf{q} - \mathbf{x}$ 来简化控制方程 (4.1), 则二阶张量 $\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ 可表示为

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = \mathbf{C}^a(\xi) + \mathbf{C}^b(\xi) \quad (4.9)$$

式中

$$\mathbf{C}^a(\xi) := \beta_s \int_{\mathcal{B}} w(|\zeta|) w(|\zeta - \xi|) \zeta \otimes (\zeta - \xi) dV_{\zeta}, \quad \mathbf{C}^b(\xi) := 2\gamma_s(\xi) \quad (4.10)$$

其中, $\mathbf{C}^a(\xi)$ 代表相对位置矢量为 ξ 的物质点对的间接相互作用对应的微模量, 而 $\mathbf{C}^b(\xi)$ 则代表了该物质点对直接相互作用的微模量。将式 (4.9) 作为微模量张量新的表达形式, 控制方程 (4.1) 可重新表示为

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathcal{B}} [\mathbf{C}^a(\xi) + \mathbf{C}^b(\xi)] \cdot [\mathbf{u}(\mathbf{x} + \xi, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] dV_{\xi} + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \quad (4.11)$$

4.2.1.1 色散关系

方程 (4.11) 作为一个线性波动方程，其基础解具有如下形式

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (4.12)$$

其中 $i^2 = -1$ ； \mathbf{U} 是幅值向量； \mathbf{k} 为波数向量； ω 为角频率。将基础解 (4.12) 代入控制方程 (4.11) 可得

$$\mathbf{M}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \rho \omega^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (4.13)$$

式中 $\mathbf{M}(\mathbf{k})$ 为二阶声学张量 (acoustic tensor)，可表示为

$$\mathbf{M}(\mathbf{k}) = \mathbf{M}^a(\mathbf{k}) + \mathbf{M}^b(\mathbf{k}) \quad (4.14)$$

其中

$$\mathbf{M}^a(\mathbf{k}) = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{C}^a(\boldsymbol{\xi}) \left(1 - e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}}\right) dV_{\boldsymbol{\xi}}, \quad \mathbf{M}^b(\mathbf{k}) = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{C}^b(\boldsymbol{\xi}) \left(1 - e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}}\right) dV_{\boldsymbol{\xi}} \quad (4.15)$$

式 (4.13) 构成了一个特征值问题，非零向量 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ 要求

$$\det[\mathbf{M}(\mathbf{k}) - \rho \omega^2 \mathbf{I}] = 0 \quad (4.16)$$

上式决定了 ω 和 \mathbf{k} 的关系，即为线性化态型 PD 的色散关系。由式 (4.16) 不难发现， $\mathbf{M}(\mathbf{k})$ 是求解色散关系显式表达式的关键，由式 (4.14) 可知， $\mathbf{M}(\mathbf{k})$ 由两部分组成： $\mathbf{M}^a(\mathbf{k})$ 和 $\mathbf{M}^b(\mathbf{k})$ 。现将 $\mathbf{M}(\mathbf{k})$ 的两部分分别求解如下。

对于 $\mathbf{M}^a(\mathbf{k})$ ，将式 (4.10) 中的 $\mathbf{C}^a(\boldsymbol{\xi})$ 代入到 (4.15) 中可得

$$\mathbf{M}^a(\mathbf{k}) = \beta_s \int_{\mathcal{B}} \int_{\mathcal{B}} w(|\boldsymbol{\zeta}|) w(|\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\xi}|) \boldsymbol{\zeta} \otimes (\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\xi}) \left(1 - e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}}\right) dV_{\boldsymbol{\zeta}} dV_{\boldsymbol{\xi}} \quad (4.17)$$

交换积分次序并令 $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta}$ ，利用被积函数的奇偶性及积分域的对称性可得

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^a(\mathbf{k}) &= -\beta_s \int_{\mathcal{B}} \int_{\mathcal{B}} w(|\boldsymbol{\zeta}|) w(|\boldsymbol{\eta}|) \boldsymbol{\zeta} \otimes \boldsymbol{\eta} \left(1 - e^{i\mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\zeta})}\right) dV_{\boldsymbol{\eta}} dV_{\boldsymbol{\zeta}} \\ &= \beta_s \int_{\mathcal{B}} \int_{\mathcal{B}} w(|\boldsymbol{\zeta}|) w(|\boldsymbol{\eta}|) \boldsymbol{\zeta} \otimes \boldsymbol{\eta} e^{i\mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\zeta})} dV_{\boldsymbol{\eta}} dV_{\boldsymbol{\zeta}} \\ &= \beta_s \int_{\mathcal{B}} e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\zeta}} w(|\boldsymbol{\zeta}|) \boldsymbol{\zeta} dV_{\boldsymbol{\zeta}} \otimes \int_{\mathcal{B}} e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\eta}} w(|\boldsymbol{\eta}|) \boldsymbol{\eta} dV_{\boldsymbol{\eta}} \\ &= -\beta_s \int_{\mathcal{B}} \sin(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\zeta}) w(|\boldsymbol{\zeta}|) \boldsymbol{\zeta} dV_{\boldsymbol{\zeta}} \otimes \int_{\mathcal{B}} \sin(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\eta}) w(|\boldsymbol{\eta}|) \boldsymbol{\eta} dV_{\boldsymbol{\eta}} \end{aligned} \quad (4.18)$$

显然上式最后一个等号后的两积分相等，可统一表达为

$$\boldsymbol{\chi}(\mathbf{k}) := \int_{\mathcal{B}} \sin(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\zeta}) w(|\boldsymbol{\zeta}|) \boldsymbol{\zeta} dV_{\boldsymbol{\zeta}} = \int_{\mathcal{B}} \sin(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\eta}) w(|\boldsymbol{\eta}|) \boldsymbol{\eta} dV_{\boldsymbol{\eta}} \quad (4.19)$$

为了求解 $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{k})$ ，建立直角坐标基 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 。不同于 Silling^[6] 和 Butt 等^[136] 假设 \mathbf{k} 与某一坐标基平行，如 $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_1$ ，其中 $k = |\mathbf{k}|$ ，我们这里考虑更一般的情况，即不要求 \mathbf{k} 与某一坐标基平行。首先建立一个新的坐标基 $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ ，并令 \mathbf{e}'_1 平行于 \mathbf{k} ，新坐标

基可表示为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

其中

$$D = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{k} & \frac{k_2}{k} & \frac{k_3}{k} \\ \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}} & \frac{-k_1}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}} & 0 \\ \frac{k_1 k_3}{k\sqrt{k_1^2+k_2^2}} & \frac{k_2 k_3}{k\sqrt{k_1^2+k_2^2}} & \frac{-\sqrt{k_1^2+k_2^2}}{k} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

这里 k_1 , k_2 和 k_3 分别为 \mathbf{k} 在 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 中的分量。则向量 ζ 在新旧坐标系中的分量满足如下关系

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} = D^T \begin{bmatrix} \zeta'_1 \\ \zeta'_2 \\ \zeta'_3 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

在新坐标基 $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ 中求得 $\chi(k\mathbf{e}'_1)$ 。再由变换关系 (4.20)-(4.22) 得到在坐标基 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 中, 一般情况下的 $\chi(\mathbf{k})$ 的表达式为

$$\chi(\mathbf{k}) = Q_s(k)\mathbf{n}_k \quad (4.23)$$

其中 $\mathbf{n}_k = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ 。式 (4.23) 对一维到三维情况均适用, 对于三维情况有

$$Q_s(k) = 4\pi \int_0^\infty w(\zeta)\zeta^3 \left(\frac{\sin k\zeta}{(k\zeta)^2} - \frac{\cos k\zeta}{k\zeta} \right) d\zeta \quad (4.24)$$

式中 $\zeta = |\zeta|$; 对于二维和一维情况分别有

$$Q_s(k) = 2\pi \int_0^\infty w(\zeta)\zeta^2 J_1(k\zeta)d\zeta, \quad Q_s(k) = \int_0^\infty w(\zeta)\zeta \sin(k\zeta)d\zeta \quad (4.25)$$

其中 $J_1(k\xi)$ 为一阶 Bessel 函数。将式 (4.23) 代入式 (4.18) 得

$$\mathbf{M}^a(\mathbf{k}) = -\beta_s \chi(\mathbf{k}) \otimes \chi(\mathbf{k}) = -\beta_s Q_s^2(k) \mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k \quad (4.26)$$

对于 $\mathbf{M}^b(\mathbf{k})$, 仍采用上文坐标变换的关系 (4.20)-(4.22), 可求得

$$\mathbf{M}^b(\mathbf{k}) = M_1 \mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k + M_2 \mathbf{P}_{\mathbf{n}_k} \quad (4.27)$$

其中 $\mathbf{P}_{\mathbf{n}_k} = \mathbf{I} - \mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k$; \mathbf{I} 为二阶单位张量。式 (4.27) 对于三维情况有

$$M_i = 8\pi\alpha_s \int_0^\infty w(\xi)\xi^2 A_i(k\xi)d\xi, \quad i = 1, 2 \quad (4.28)$$

其中 $\xi = |\xi|$

$$A_1(k\xi) = \frac{1}{3} - \frac{\sin(k\xi)}{k\xi} - \frac{2\cos(k\xi)}{(k\xi)^2} + \frac{2\sin(k\xi)}{(k\xi)^3}, \quad A_2(k\xi) = \frac{1}{3} + \frac{\cos(k\xi)}{(k\xi)^2} - \frac{\sin(k\xi)}{(k\xi)^3} \quad (4.29)$$

对于二维情况有

$$M_i = 4\pi\alpha_s \int_0^\infty w(\xi) A_i(k\xi) \xi d\xi, \quad i = 1, 2 \quad (4.30)$$

其中

$$A_1(k\xi) = \frac{1}{2} - J_0(k\xi) + \frac{J_1(k\xi)}{(k\xi)}, \quad A_2(k\xi) = \frac{1}{2} - \frac{J_1(k\xi)}{(k\xi)} \quad (4.31)$$

其中, $J_0(k\xi)$ 为零阶 Bessel 函数。对于一维情况, 将所有矢量直接标量化, $\mathbf{M}(k)$ 记为 $M(k)$

$$M(k) = 2\alpha_s \int_0^\infty w(\xi) (1 - \cos(k\xi)) d\xi \quad (4.32)$$

总之, $\mathbf{M}^a(\mathbf{k})$ 和 $\mathbf{M}^b(\mathbf{k})$ 可分别由式 (4.26) 和 (4.27) 求出, 将两者代入式 (4.14) 即可得到张量 $\mathbf{M}(\mathbf{k})$ 的表达式

$$\mathbf{M}(\mathbf{k}) = M_{\parallel}(k) \mathbf{n}_{\mathbf{k}} \otimes \mathbf{n}_{\mathbf{k}} + M_{\perp}(k) \mathbf{P}_{\mathbf{n}_{\mathbf{k}}} \quad (4.33)$$

其中

$$M_{\parallel}(k) = M_1(k) - \beta_s Q_s^2(k), \quad M_{\perp}(k) = M_2(k) \quad (4.34)$$

上式中分量 M_{\parallel} 和 M_{\perp} 分别为 $\mathbf{M}(\mathbf{k})$ 平行和垂直于波数矢量 \mathbf{k} 的分量。式 (4.34) 表明相应于间接相互作用微模量张量 \mathbf{C}^a 的 \mathbf{M}^a 仅仅对 M_{\parallel} 有影响。对于泊松比为 1/4 的三维问题, $\mathbf{M}(\mathbf{k})$ 可退化为 Weckner 等^[132] 得到的键型 PD 的结果。

另外, 当非局部特征长度 ℓ 趋于零时, Silling 和 Lehoucq 等^[140] 已经证明了线性化态型 PD 的控制方程将退化为经典线弹性方程。那么当 $\ell \rightarrow 0$ 时, 线性化态型 PD 的 $\mathbf{M}(\mathbf{k})$ 在不同权函数 $w(\xi)$ 的情况下也应趋于经典的值。现以三维为例就不同权函数将该结论证明如下。在 PD 理论中, 常用的权函数 $w(\xi)$ 可分为两类: 第一类为紧支型权函数, 此时非局部特征长度 ℓ 为有限值, 非局部邻域为有限域, 例如常数型权函数

$$w(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| \leq \ell \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (4.35)$$

和线性权函数

$$w(\xi) = \begin{cases} 1 - |\xi|/\ell, & |\xi| \leq \ell \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (4.36)$$

第二类为非紧支型权函数, 此时权函数定义在无限域上, 非局部特征长度 ℓ 用来表征非局部性的强弱, 例如指数函数 $w(\xi) = e^{-|\xi|/\ell}$ 和高斯函数 $w(\xi) = e^{-\xi^2/\ell^2}$ 。对于第一类

函数，当 $\ell \rightarrow 0$ ， $\mathbf{M}(\mathbf{k})$ 的分量 M_{\parallel} 和 M_{\perp} 通过泰勒展开可分别表示为

$$\begin{aligned} M_{\parallel} &= 8\pi\alpha_s \int_0^{\ell} w(\xi)\xi^2 A_1(k\xi) d\xi - \beta_s \left[\int_0^{\ell} w(\xi)\xi^3 \left(\frac{\sin(k\xi)}{k^2\xi^2} - \frac{\cos(k\xi)}{k\xi} \right) d\xi \right]^2 \\ M_{\perp} &= 8\pi\alpha_s \int_0^{\ell} w(\xi)\xi^2 A_2(k\xi) d\xi \end{aligned} \quad (4.37)$$

其中

$$\begin{aligned} A_1(k\xi) &= \frac{k^2\xi^2}{10} + O(k^4\xi^4) \\ A_2(k\xi) &= \frac{k^2\xi^2}{30} + O(k^4\xi^4) \\ \frac{\sin(k\xi)}{(k\xi)^2} - \frac{\cos(k\xi)}{(k\xi)} &= \frac{k\xi}{3} + O(k^3\xi^3) \end{aligned} \quad (4.38)$$

由于 $\xi \leq \ell$ ，当 k 为有限值且 $\ell \rightarrow 0$ 时， $k\xi$ 将为无限小值。那么式 (4.38) 中的高阶项可忽略，从而得到

$$M_{\parallel} = (\lambda + 2\mu)k^2, \quad M_{\perp} = \mu k^2 \quad (4.39)$$

上式即为经典线弹性方程对应的结果，其中 λ 和 μ 为 Lamé 常数。对于第二类函数，当 $\ell \rightarrow 0$ 时，权函数近似为

$$w(\xi) = e^{-|\xi|/\ell} \stackrel{\ell \rightarrow 0}{\approx} 2\ell\delta(\xi), \quad w(\xi) = e^{-\xi^2/\ell^2} \stackrel{\ell \rightarrow 0}{\approx} \ell\sqrt{\pi}\delta(\xi) \quad (4.40)$$

将上式中的近似函数分别代入式 (4.34) 均可得到式 (4.39) 中的经典线弹性方程的结果。

在讨论了由式 (4.14) 得到的 $\mathbf{M}(\mathbf{k})$ 的收敛性之后，让我们将重心转回到特征值方程 (4.13)，将三维和二维的色散关系分别求解如下。一维情况较为简单，色散关系直接由 $\omega(k) = \sqrt{M(k)/\rho}$ 给出，这里不做讨论。

(1) 三维问题

将式 (4.33) 代入到式 (4.16) 可得该特征值问题有两个特征根： ω_{\parallel} 和 ω_{\perp} 。其中 ω_{\perp} 为重根。 ω_{\parallel} 和 ω_{\perp} 的特征向量分别平行和垂直于波传播的方向，也就是说位移 (4.12) 有且仅有两种模式：

(a) 纵波 (P 波) 如果位移向量与波传播的方向平行，即 $\mathbf{u}_{\parallel}\mathbf{n}_{\mathbf{k}}$ ，则纵波 (P 波) 的色散关系为

$$\omega_{\parallel}(k) = \sqrt{\frac{M_{\parallel}(k)}{\rho}} \quad (4.41)$$

(b) 横波 (S 波) 如果位移向量与波传播的方向垂直，即 $\mathbf{u}_{\perp}\mathbf{n}_{\mathbf{k}}$ ，则横波 (S 波) 的色散关系为

$$\omega_{\perp}(k) = \sqrt{\frac{M_{\perp}(k)}{\rho}} \quad (4.42)$$

(2) 二维问题

(a) 平面应变波 (P 波和 SV 波) 平面应变波是指位移向量和波传播的方向永远在同一个平面内, 位移分量 $u_3 = 0$ 且 $u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2) \neq 0$ 。则特征值问题 (4.14) 变为

$$\begin{bmatrix} M_{11} - \rho\omega^2 & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} - \rho\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.43)$$

上式有两个特征根 $\omega_{\parallel} = \sqrt{M_{\parallel}/\rho}$ 和 $\omega_{\perp} = \sqrt{M_{\perp}/\rho}$ 。它们的特征向量分别平行和垂直于波传播的方向, 对应两种模式的波, 即 P 波和 SV 波。

(b) 反平面波 (SH 波) 对于反平面问题, 位移分量 $u_3(x_1, x_2) \neq 0$ 且 $u_1 = u_2 = 0$, 也就是说位移向量永远与波传播的方向垂直。此时的波称为 SH 波, 波动方程变为泊松方程, 色散关系为 $\omega_{\perp} = \sqrt{M_{\perp}/\rho}$ 。

最后特意指出两点: 第一, 与键型 PD 相比, 态型 PD 中的间接相互作用仅影响纵波的色散关系, 进而影响下文将要详细讨论的纵波的群速度和相速度等纵向动态特性; 第二, 由 $\mathbf{M}(k)$ 的收敛性可知, 当 $\ell \rightarrow 0$ 时态型 PD 的色散关系也收敛于经典线弹性理论的色散关系, 另外, 当 ℓ 为任一有限值时, 态型 PD 的非线性色散曲线在长波极限 $k \rightarrow 0$ 处相切于经典线弹性理论的线性色散关系 (直线)。

4.2.1.2 群速度和相速度

群速度为研究方程动态特性的基本工具, 在精确解未知的情况下, 利用群速度仍可给出介质中波传播的形貌。本小节将态型 PD 的群速度和相速度讨论如下。对任一相位

$$\theta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t \quad (4.44)$$

局部波数 \mathbf{k} 和频率 ω 可计算为

$$\mathbf{k} = \nabla_{\mathbf{x}}\theta, \quad \omega = -\theta_t \quad (4.45)$$

其中 $\nabla_{\mathbf{x}}$ 为关于 \mathbf{x} 的梯度。利用式 (4.45) 中的两式消去 θ 可得

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}}\omega = \mathbf{0} \quad (4.46)$$

上式可进一步表示为

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} + \mathbf{c}_g(\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k} \otimes \nabla_{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad (4.47)$$

其中

$$\mathbf{c}_g(\mathbf{k}) = \frac{d\omega(k)}{dk} \mathbf{n}_{\mathbf{k}} \quad (4.48)$$

$\mathbf{c}_g(\mathbf{k})$ 即为群速度，由上式可知群速度矢量永远平行于波传播的方向。对任一相位，式 (4.44) 可表示为

$$\theta = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}_p t) \quad (4.49)$$

其中

$$\mathbf{c}_p(\mathbf{k}) = \frac{\omega}{k} \mathbf{n}_k \quad (4.50)$$

$\mathbf{c}_p(\mathbf{k})$ 即为相速度。利用上一小节得到的纵波和横波的色散关系 ω_{\parallel} 和 ω_{\perp} ，可分别由式 (4.48) 和式 (4.50) 计算得到相应的群速度和相速度。

4.2.2 无界域初值问题的格林函数法

无限大或无界参考构型 \mathcal{B} 的控制方程 (4.1) 在初始条件 (4.8) 的一般解可用格林函数法求解如下。将方程 (4.1) 进行傅里叶变换和拉普拉斯变换后可得

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, s) = [s^2 \mathbf{I} + \mathbf{M}(\mathbf{k})/\rho]^{-1} \cdot [\tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{k}, s) + s\tilde{\mathbf{u}}_0(\mathbf{k}) + \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_0(\mathbf{k})] \quad (4.51)$$

由拉普拉斯逆变换及其卷积定理可得

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{\rho} \int_0^t \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{k}, t) \cdot \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{k}, t - \tau) d\tau + \dot{\hat{\mathbf{G}}}(\mathbf{k}, t) \cdot \hat{\mathbf{u}}_0(\mathbf{k}) + \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{k}, t) \cdot \dot{\hat{\mathbf{u}}}_0(\mathbf{k}) \quad (4.52)$$

其中

$$\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{k}, t) = \mathcal{L}^{-1} \{s^2 \mathbf{I} + \mathbf{M}(\mathbf{k})/\rho\} = \frac{\sin(\omega_{\parallel}(k)t)}{\omega_{\parallel}(k)} \mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k + \frac{\sin(\omega_{\perp}(k)t)}{\omega_{\perp}(k)} \mathbf{P}_{\mathbf{n}_k} \quad (4.53)$$

最后利用傅里叶逆变换，可得方程 (4.1) 在初始条件 (4.8) 下的一般解

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = & \frac{1}{\rho} \int_{\mathcal{B}} \int_0^t \mathbf{G}(\mathbf{x}', \tau) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - \tau) d\tau dV_{\mathbf{x}'} + \int_{\mathcal{B}} \dot{\mathbf{G}}(\mathbf{x}', \tau) \cdot \mathbf{u}_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV_{\mathbf{x}'} \\ & + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{G}(\mathbf{x}', \tau) \cdot \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV_{\mathbf{x}'} \end{aligned} \quad (4.54)$$

其中 $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}^{-1} \{\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{k}, t)\}$ 为动态格林函数。

对于静态问题，类似于上文的作法，可将一般解表示为

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{G}(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV_{\mathbf{x}'} \quad (4.55)$$

其中 $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1} \{\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{k})\}$ 为静态格林函数。式 (4.54) 和式 (4.55) 均说明一般解依赖于格林函数，而格林函数取决于色散关系或声学张量。现将态型 PD 的格林函数具体求解如下。

对式 (4.53) 进行傅里叶逆变换，可得动态格林函数

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, t) = G_{\parallel}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}_x \otimes \mathbf{n}_x + G_{\perp}(\mathbf{x}, t) \mathbf{P}_{\mathbf{n}_x} \quad (4.56)$$

其中 $x = |\mathbf{x}|$ ， $\mathbf{n}_x = \mathbf{x}/x$ ， $\mathbf{P}_{\mathbf{n}_x} = \mathbf{I} - \mathbf{n}_x \otimes \mathbf{n}_x$ 。对于三维问题，分量 $G_{\parallel}(x, t)$ 和 $G_{\perp}(x, t)$ 分

别为

$$\begin{aligned} G_{\parallel}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} k^2 \left[a_1(kx) \left(\frac{\sin(\omega_{\perp}(k)t)}{\omega_{\perp}(k)} - \frac{\sin(\omega_{\parallel}(k)t)}{\omega_{\parallel}(k)} \right) + \frac{\sin(kx)}{kx} \frac{\sin(\omega_{\perp}(k)t)}{\omega_{\perp}(k)} \right] dk \\ G_{\perp}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} k^2 \left[a_2(kx) \left(\frac{\sin(\omega_{\perp}(k)t)}{\omega_{\perp}(k)} - \frac{\sin(\omega_{\parallel}(k)t)}{\omega_{\parallel}(k)} \right) + \frac{\sin(kx)}{kx} \frac{\sin(\omega_{\perp}(k)t)}{\omega_{\perp}(k)} \right] dk \end{aligned} \quad (4.57)$$

其中 $a_i(kx) = A_i(kx) - \frac{1}{3}$, $i = 1, 2$, $A_i(kx)$ 由式 (4.29) 给出。需要注意的是对于常用的 PD 权函数, 上式 (4.57) 中的两个积分是发散的。仿照 Weckner 等^[132] 的做法, 可将其拆分为一个 Dirac 函数和一个收敛积分

$$\begin{aligned} G_{\parallel}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\sin(\omega_{\infty}t)}{\omega_{\infty}} \delta(\mathbf{x}) + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} k^2 \left[a_1(kx) \left(\frac{\sin(\omega_{\perp}(k)t)}{\omega_{\perp}(k)} - \frac{\sin(\omega_{\parallel}(k)t)}{\omega_{\parallel}(k)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin(kx)}{kx} \left(\frac{\sin(\omega_{\perp}(k)t)}{\omega_{\perp}(k)} - \frac{\sin(\omega_{\infty}t)}{\omega_{\infty}} \right) \right] dk \\ G_{\perp}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\sin(\omega_{\infty}t)}{\omega_{\infty}} \delta(\mathbf{x}) + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} k^2 \left[a_2(kx) \left(\frac{\sin(\omega_{\perp}(k)t)}{\omega_{\perp}(k)} - \frac{\sin(\omega_{\parallel}(k)t)}{\omega_{\parallel}(k)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin(kx)}{kx} \left(\frac{\sin(\omega_{\perp}(k)t)}{\omega_{\perp}(k)} - \frac{\sin(\omega_{\infty}t)}{\omega_{\infty}} \right) \right] dk \end{aligned} \quad (4.58)$$

其中 $\delta(\mathbf{x})$ 为三维 Dirac 函数, $\omega_{\infty} = \sqrt{M_{\infty}/\rho}$, $M_{\infty} = \lim_{k \rightarrow +\infty} M_{\perp} = \lim_{k \rightarrow +\infty} M_{\parallel}$ 。同样地, 二维动态格林函数各分量 $G_{\parallel}(x, t)$ 和 $G_{\perp}(x, t)$ 分别为

$$\begin{aligned} G_{\parallel}(x, t) &= \frac{\sin(\omega_{\infty}t)}{\omega_{\infty}} \delta(x) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} k \left[a_1(kx) \left(\frac{\sin(\omega_{\perp}(k)t)}{\omega_{\perp}(k)} - \frac{\sin(\omega_{\parallel}(k)t)}{\omega_{\parallel}(k)} \right) \right. \\ &\quad \left. + J_0(kx) \left(\frac{\sin(\omega_{\perp}(k)t)}{\omega_{\perp}(k)} - \frac{\sin(\omega_{\infty}t)}{\omega_{\infty}} \right) \right] dk \\ G_{\perp}(x, t) &= \frac{\sin(\omega_{\infty}t)}{\omega_{\infty}} \delta(x) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} k \left[a_2(kx) \left(\frac{\sin(\omega_{\perp}(k)t)}{\omega_{\perp}(k)} - \frac{\sin(\omega_{\parallel}(k)t)}{\omega_{\parallel}(k)} \right) \right. \\ &\quad \left. + J_0(kx) \left(\frac{\sin(\omega_{\perp}(k)t)}{\omega_{\perp}(k)} - \frac{\sin(\omega_{\infty}t)}{\omega_{\infty}} \right) \right] dk \end{aligned} \quad (4.59)$$

此时式中 $\delta(x)$ 为二维 Dirac 函数, $a_i(kx) = A_i(kx) - \frac{1}{2}$, $i = 1, 2$, $A_i(kx)$ 由式 (4.31) 给出。对于一维问题有

$$G(x, t) = \frac{\sin(\omega_{\infty}t)}{\omega_{\infty}} \delta(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(kx) \left(\frac{\sin(\omega(k)t)}{\omega(k)} - \frac{\sin(\omega_{\infty}t)}{\omega_{\infty}} \right) dk \quad (4.60)$$

式中 $\delta(x)$ 为一维 Dirac 函数。由式 (4.58)-式 (4.60) 可知, 动态位移解 (4.54) 可分解为两部分, 分别对应于格林函数中的 Dirac 函数和收敛积分。其中对应于 Dirac 函数部分的位移可表示为

$$\mathbf{G}^{\text{Dirac}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\sin(\omega_{\infty}t)}{\omega_{\infty}} \delta(\mathbf{x}) \mathbf{I} \quad (4.61)$$

将式 (4.61) 代入式 (4.54) 得

$$\mathbf{u}^{\text{Dirac}}(\mathbf{x}, t) = \cos(\omega_\infty t) \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \frac{\sin(\omega_\infty t)}{\omega_\infty} \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) + \int_0^t \frac{\sin(\omega_\infty \tau)}{\rho \omega_\infty} \mathbf{b}(\mathbf{x}, t - \tau) d\tau \quad (4.62)$$

上式表明位移场的连续性与初始条件和体力场的连续性一致。即，若初始条件或体力场为一阶连续则位移场为一阶连续；若初始条件或体力场不连续，则位移场也不连续。另外，由上式前两项可知，初始条件将按照一固定的频率 ω_∞ 随时间演化。

对于静态格林函数，三维情况下有

$$\begin{aligned} G_{\parallel}(\mathbf{x}) &= \frac{\delta(\mathbf{x})}{M_\infty} + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 \left[a_1(kx) \left(\frac{1}{M_\perp(k)} - \frac{1}{M_\parallel(k)} \right) + \frac{\sin(kx)}{kx} \left(\frac{1}{M_\perp(k)} - \frac{1}{M_\infty} \right) \right] dk \\ G_{\perp}(\mathbf{x}) &= \frac{\delta(\mathbf{x})}{M_\infty} + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 \left[a_2(kx) \left(\frac{1}{M_\perp(k)} - \frac{1}{M_\parallel(k)} \right) + \frac{\sin(kx)}{kx} \left(\frac{1}{M_\perp(k)} - \frac{1}{M_\infty} \right) \right] dk \end{aligned} \quad (4.63)$$

其中 $\delta(\mathbf{x})$ 为三维 Dirac 函数， $a_i(kx) = A_i(kx) - \frac{1}{3}$ ， $i = 1, 2$ ， $A_i(kx)$ 由式 (4.29) 给出。二维平面应力情况下有

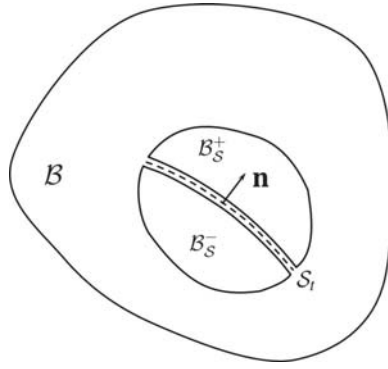
$$\begin{aligned} G_{\parallel}(\mathbf{x}) &= -\frac{3-\nu}{8\pi} \ln(x) + \frac{\delta(\mathbf{x})}{M_\infty} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty k \left[a_1(kx) \left(\frac{1}{M_\perp(k)} - \frac{1}{M_\parallel(k)} - \frac{1+\nu}{2\mu k^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + J_0(kx) \left(\frac{1}{M_\perp(k)} - \frac{1}{M_\infty} - \frac{1}{\mu k^2} \right) \right] dk \\ G_{\perp}(\mathbf{x}) &= -\frac{3-\nu}{8\pi} \ln(x) + \frac{\delta(\mathbf{x})}{M_\infty} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty k \left[a_2(kx) \left(\frac{1}{M_\perp(k)} - \frac{1}{M_\parallel(k)} - \frac{1+\nu}{2\mu k^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + J_0(kx) \left(\frac{1}{M_\perp(k)} - \frac{1}{M_\infty} - \frac{1}{\mu k^2} \right) \right] dk \end{aligned} \quad (4.64)$$

此时式中 $\delta(\mathbf{x})$ 为二维 Dirac 函数， $a_i(kx) = A_i(kx) - \frac{1}{2}$ ， $i = 1, 2$ ， $A_i(kx)$ 由式 (4.31) 给出。上式对二维平面应变问题仍适用，只需将 ν 和 E 分别替换为 $\nu/(1-\nu)$ 和 $E/(1-\nu^2)$ 。一维情况下有

$$G(x) = -\frac{|x|}{2E} + \frac{\delta(x)}{M_\infty} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(kx) \left(\frac{1}{M(k)} - \frac{1}{M_\infty} - \frac{1}{Ek^2} \right) dk \quad (4.65)$$

4.2.3 间断条件及不连续场的演化

Weckner 和 Abeyaratane^[56] 指出 PD 允许位移场不连续，一个不连续的位移场可能会表现出与经典线弹性理论不同的特性。Weckner 和 Abeyaratne^[56] 研究了一维键型 PD 的间断条件及不连续场的演化。Weckner 等^[132] 随后提出了三维键型 PD 的间断条件，但高维键型 PD 不连续场的演化至今还没有相关研究。综上可知，现有的关于间断条件及不连续场演化的研究仅仅面向键型 PD，目前还没有面向态型 PD 的研究。鉴于此，本小节将提出三维态型 PD 的间断条件并研究其不连续场的演化规律。


 图 4.1 有界子域 B_S 中的间断面 S_t

4.2.3.1 间断条件

如图 4.1 所示, 面 S_t 镶嵌在三维参考构型 B 中。面 S_t 左右两侧位移场和速度场允许不连续, 除此之外, 在其它位置处处连续。考虑 B 中任一包括面 S_t 的子域 B_S , S_t 将 B_S 分为 B_S^- 和 B_S^+ 两部分。 B_S 内的任一物质点 \mathbf{x} 受到的 B_S 区域外的所有物质点作用的合力密度 $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t; B_S)$ 可表示为

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t; B_S) = \int_{B-B_S} \mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{q}) [\mathbf{u}(\mathbf{q}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] dV_{\mathbf{q}} \quad (4.66)$$

因此, B_S 整体的运动方程可表示为

$$\int_{B_S-S_t} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t; B_S) dV_{\mathbf{x}} + \int_{B_S-S_t} \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} \int_{B_S-S_t} \rho \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} \quad (4.67)$$

由 Reynolds 输运定理^[1], 方程 (4.67) 右侧在参考构型中可表示为

$$\frac{d}{dt} \int_{B_S-S_t} \rho \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} = \int_{B_S-S_t} \rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} - \int_{S_t} \rho V_n [[\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)]] dS \quad (4.68)$$

其中, V_n 为面 S_t 在参考构型中沿法向 \mathbf{n} 的运动速度, 法向量 \mathbf{n} 由 B_S^- 指向 B_S^+ (图 4.1); 右端的间断符号定义为 $[[q(\mathbf{x}, t)]] = q^+ - q^-$ 其中 q^+ 和 q^- 分别代表任一函数 $q(\mathbf{x}, t)$ 从面 S_t 向量 \mathbf{n} 的正负两侧趋近于面 S_t 时的极限。将式 (4.68) 代入方程 (4.67) 得

$$\int_{B_S-S_t} [\mathbf{F}(\mathbf{x}, t; B_S) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) - \rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)] dV_{\mathbf{x}} + \int_{S_t} \rho V_n [[\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)]] dS = \mathbf{0} \quad (4.69)$$

由控制方程 (4.1) 可知, 上式第一项积分中的被积函数为零向量, 可消去。方程 (4.69) 成立的充分条件为

$$\rho V_n [[\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}^*, t)]] = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}^* \in S_t \quad (4.70)$$

上式等效于

$$V_n = 0 \text{ or } [[\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}^*, t)]] = \mathbf{0} \text{ on } S_t \quad (4.71)$$

式 (4.70) 或 (4.71) 即为态型 PD 的在间断面 S_t 上应满足的间断条件。该条件表明, 如果面 S_t 上存在速度不连续, 即 $[[\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}^*, t)]] \neq \mathbf{0}$, 则该面在其法向方向上保持静止, 即

$V_n = 0$ 。

4.2.3.2 不连续场的演化

接下来以不连续位移场 $[[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]]$ 为例研究不连续场的演化规律。两侧极限 \mathbf{u}^+ 和 \mathbf{u}^- 均满足控制方程 (4.1)。 \mathbf{u}^- 的控制方程减去 \mathbf{u}^+ 控制方程可得

$$\rho [[\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}^*, t)]] + \mathbf{P} \cdot [[\mathbf{u}(\mathbf{x}^*, t)]] = [[\mathbf{b}(\mathbf{x}^*, t)]] \quad (4.72)$$

其中

$$\mathbf{P} = \int_B \mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{q}) dV_{\mathbf{q}} = \int_B \mathbf{C}^b(\boldsymbol{\xi}) dV_{\boldsymbol{\xi}} = 2 \int_B \gamma_s(\boldsymbol{\xi}) dV_{\boldsymbol{\xi}} = P_0 \mathbf{I} \quad (4.73)$$

式中 $P_0 = M_{\infty}$ 。

方程 (4.72) 是一个关于 $[[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]]$ 的二阶常微分方程。由 \mathbf{P} 的形式 (4.73)，可将方程 (4.72) 解耦得

$$\rho [[\ddot{u}_i(\mathbf{x}^*, t)]] + P_0 [[u_i(\mathbf{x}^*, t)]] = [[b_i(\mathbf{x}^*, t)]] \quad \text{for } \mathbf{x}^* \in S_t \quad (4.74)$$

上式表明不连续位移来自于体力和初值的不连续，且每个间断位移的分量之间相互独立。也就是说，如果初始条件或体力在某一分量方向上一直连续，则该分量方向上的位移永远不会出现不连续的现象。再者，所有的间断位移分量遵循相同的演化规律：若 $P_0 > 0$ ，则间断位移各分量呈简谐变化；若 $P_0 < 0$ ，则间断位移各分量呈指数变化；若 $P_0 = 0$ ，则间断位移各分量呈线性变化。由 P_0 的表达式可以看出 P_0 的值取决于权函数 $w(\boldsymbol{\xi})$ 。若某介质中 $P_0 \leq 0$ ，则间断位移会一直增长至无穷大，即该材料对初始条件和体力场的不连续扰动均是不稳定的。对于式 (4.81) 所列的权函数，均有 $P_0 = M_{\infty} > 0$ ，此时方程 (4.74) 的解为

$$[[u_i(\mathbf{x}, t)]] = [[u_i(\mathbf{x}, 0)]] \cos(\omega_{\infty} t) + [[\dot{u}_i(\mathbf{x}, 0)]] \frac{\sin(\omega_{\infty} t)}{\omega_{\infty}} + \int_0^t \frac{\sin(\omega_{\infty} \tau)}{\rho \omega_{\infty}} [[b_i(\mathbf{x}, t - \tau)]] d\tau \quad (4.75)$$

上式直观地说明了态型 PD 中的间断是如何从初始条件和体力中产生并演化的。

式 (4.75) 的正确性可进一步通过上一小节得到的初值问题的解 (4.54) 来验证。为此，格林函数 (4.56) 可写为

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{G}^{\text{con}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{G}^{\text{Dirac}}(\mathbf{x}, t) \quad (4.76)$$

式中

$$\mathbf{G}^{\text{con}}(\mathbf{x}, t) = G_{\parallel}^{\text{con}}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{n}_{\mathbf{x}} + G_{\perp}^{\text{con}}(\mathbf{x}, t) \mathbf{P}_{\mathbf{n}_{\mathbf{x}}} \quad (4.77)$$

其中

$$G_{\parallel}^{\text{con}}(\mathbf{x}, t) = G_{\parallel}(\mathbf{x}, t) - \frac{\sin(\omega_{\infty} t)}{\omega_{\infty}} \delta(\mathbf{x}), \quad G_{\perp}^{\text{con}}(\mathbf{x}, t) = G_{\perp}(\mathbf{x}, t) - \frac{\sin(\omega_{\infty} t)}{\omega_{\infty}} \delta(\mathbf{x}) \quad (4.78)$$

将式 (4.76) 代入式 (4.54) 得

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^{\text{con}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}^{\text{Dirac}}(\mathbf{x}, t) \quad (4.79)$$

其中 $\mathbf{u}^{\text{con}}(\mathbf{x}, t)$ 和 $\mathbf{u}^{\text{Dirac}}(\mathbf{x}, t)$ 分别是相应于格林函数 $\mathbf{G}^{\text{con}}(\mathbf{x}, t)$ 和 $\mathbf{G}^{\text{Dirac}}(\mathbf{x}, t)$ 的位移响应。 $\mathbf{G}^{\text{con}}(\mathbf{x}, t)$ 的分量 $G_{\parallel}^{\text{con}}(\mathbf{x}, t)$ 和 $G_{\perp}^{\text{con}}(\mathbf{x}, t)$ 均收敛且有界, 从而确保了初始条件和体力中的不连续在积分后完全消失, 因此相应的位移场 $\mathbf{u}^{\text{con}}(\mathbf{x}, t)$ 永远连续。所以位移场 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ 的不连续或间断只可能存在于式 (4.62) 表达的位移 $\mathbf{u}^{\text{Dirac}}(\mathbf{x}, t)$ 中。将任一给定的初始条件间断或体力间断代入式 (4.62) 即可得到式 (4.75)。可见, 初值问题的格林函数解和本小节中由位移间断分析给出的结果是自洽的, 从而同时验证了两者的正确性。

4.2.4 算例

本小节通过具体的算例展示上文的結果及其应用。

4.2.4.1 动态基本特性的影响因素

基于上文得到的态型 PD 的基本动态特性 (色散关系、群速度和相速度) 的解析表达式, 下面通过具体实例分别讨论非局部特征长度、泊松比、权函数对基本动态特性的影响。

(1) 非局部特征长度的影响

以纵波为例, 令权函数 $w(|\xi|) = e^{-\xi^2/\ell^2}$ 和泊松比 $\nu = 0.3$ 。选取某一特征长度 l_0 和经典线弹性的剪切波速 $c_0 = \sqrt{\mu/\rho}$ 来进行无量纲化。色散关系、群速度和相速度分别可由式 (4.41)、式 (4.48) 和式 (4.50) 计算得到, 结果分别如图 4.2(a)、图 4.2(b) 和图 4.2(c) 所示, 其中 $\gamma_0 = \ell/l_0$ 。随着非局部特征长度的减小, 所有的结果毫无意外地趋向于经典线弹性理论解。角频率随着波数 kl_0 的增大, 先增大后减小, 最后趋于一个常数, 即

$$\omega_{\infty} := \lim_{k \rightarrow +\infty} \omega_{\parallel} = \sqrt{M_{\infty}/\rho} \quad (4.80)$$

该现象与 Silling^[6] 报道的键型 PD 的现象一致。

图 4.2(b) 和图 4.2(c) 中, 群速度 $c_{g\parallel}$ 和相速度 $c_{p\parallel}$ 在长波极限 $k = 0$ 时与经典线弹性理论的群速度和相速度一致。随着 kl_0 的增大, 群速度逐渐减小到负值, 而后增加并趋于零, 这与文献^[105] 报道的一维键型 PD 的现象一致。有趣的是, 群速度的最小值和非局部特征长度无关, 而在传统材料参数选定的情况下仅取决于权函数。相速度则是随着 k 的增大而单调递减至零。对于正泊松比材料, 除了长波极限外, 态型 PD 的结果均小于经典线弹性理论的解, 这意味着态型 PD 预测的短波 (大波数) 比长波 (小波数) 传播得慢。

同样地, 泊松比 $\nu = -0.3$ 的结果与 $\nu = 0.3$ 的结果类似, 如图 4.3 所示。不同的是,

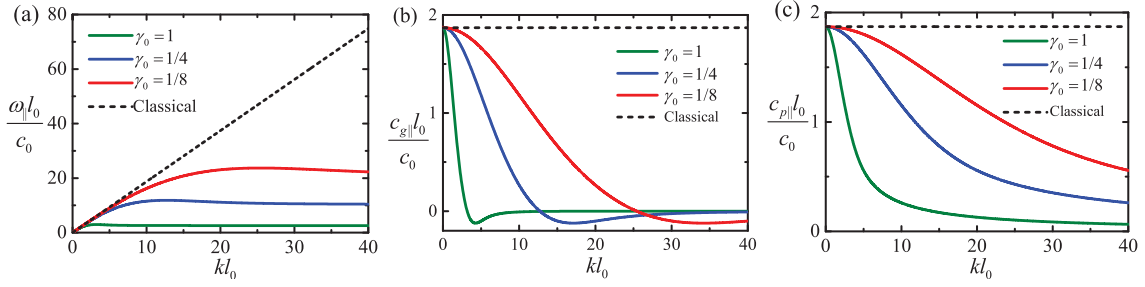


图 4.2 在不同特征长度 ℓ 下态型 PD 纵波 (P 波) 特征 (泊松比 $\nu = 0.3$): (a) 色散关系; (b) 群速度; (c) 相速度

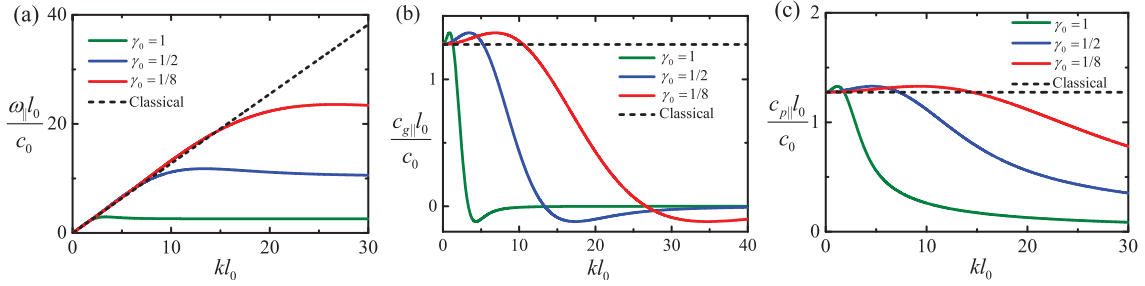


图 4.3 在不同特征长度 ℓ 下态型 PD 纵波 (P 波) 特征 (泊松比 $\nu = -0.3$): (a) 色散关系; (b) 群速度; (c) 相速度

态型 PD 的结果不再永远小于经典线弹性理论的值。如图 4.3 所示, 在长波极限 $k = 0$ 附近, 色散关系、群速度和相速度均大于经典值。这意味着对于负泊松比材料, 某一特定波长范围内, 态型 PD 预测的弹性波的传播速度大于经典理论的预测值。

(2) 泊松比的影响

对于不同的泊松比 $\nu = -1, -0.5, 0, 0.25, 0.45$, 纵波的动力学特性结果如图 4.4, 此时 $\ell/l_0 = 1$ 。角频率和相速度随着泊松比的增大而增大, 且在 $\nu \rightarrow 0.5$ 时, 泊松比的影响较为显著。这是由于纵波的色散关系由两项组成 (见式 (4.34) 和式 (4.41)), 而第二项的系数为 $\beta_s = \frac{9\mu(1-4\nu)}{m_s^2(1-2\nu)}$ (见式 (4.5))。易知 $\nu \rightarrow 0.5$ 时, β_s 会产生明显变化, 故而色散关系、群速度和相速度的变化也较为明显。

(3) 权函数的影响

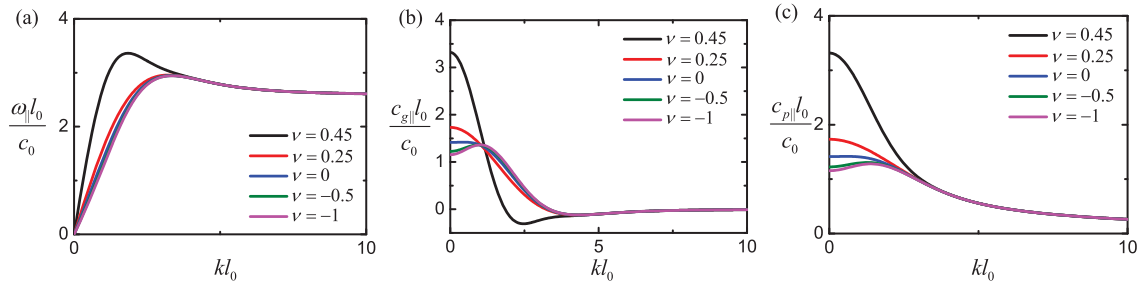


图 4.4 不同泊松比的态型 PD 纵波 (P 波) 特征 ($\ell/l_0 = 1$): (a) 色散关系; (b) 群速度; (c) 相速度

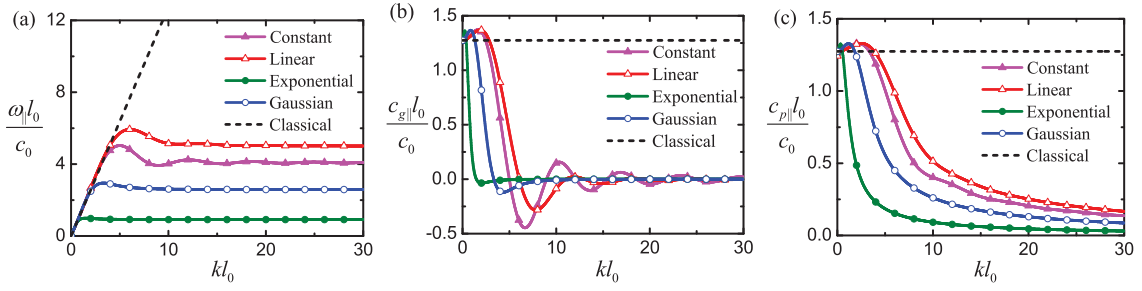


图 4.5 不同权函数的态型 PD 纵波 (P 波) 特征 ($v = -0.3$, $\ell/l_0 = 1$): (a) 色散关系; (b) 群速度; (c) 相速度

考虑常数型、线性、指数型、高斯型四类权函数，分别表达如下：

$$w(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| \leq \ell, \\ 0, & |\xi| > \ell, \end{cases} \quad (\text{Constant})$$

$$w(\xi) = \begin{cases} 1 - |\xi|/\ell, & |\xi| \leq \ell, \\ 0, & |\xi| > \ell, \end{cases} \quad (\text{Linear}) \quad (4.81)$$

$$w(\xi) = e^{-|\xi|/\ell} \quad (\text{Exponential})$$

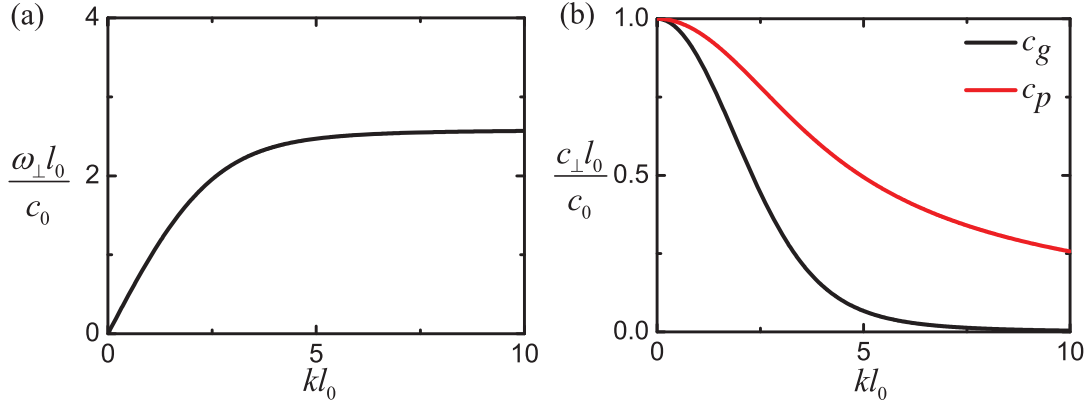
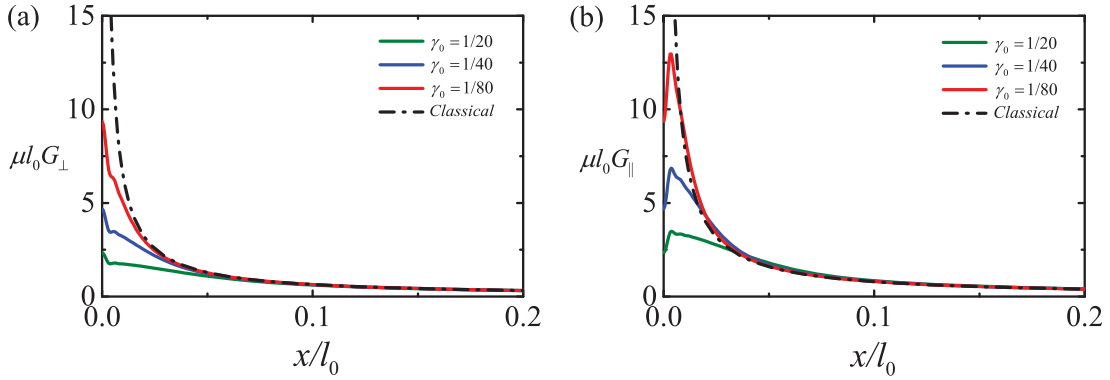
$$w(\xi) = e^{-\xi^2/\ell^2} \quad (\text{Gaussian})$$

纵波的动力学特性结果如图 4.5 所示。除了与上文类似的特性外，权函数对结果的影响主要反映为以下几个方面：第一，第一类权函数（常数型和线性）的结果中存在明显的振荡，而第二类核函数（指数型和高斯型）的结果中却无振荡，该现象是由于有限的非局部特征长度相当于截断半径，可以预言第一类权函数均会产生类似的振荡；第二，同样情况下，第一类权函数的频率在短波极限处的极限值高于第二类的，且群速度和相速度趋于零的速度小于第二类的。

以上分析均以纵波为例，下面简要分析横波的动力学特性。如图 4.6 所示，其中图 4.6(b) 的纵坐标 c_{\perp} 代表了横波的群速度或相速度。由图 4.6 可知随着 kl_0 的增大，群速度和相速度单调递减且永远大于零，角频率单调递增且

$$\omega_{\infty} =: \lim_{k \rightarrow +\infty} \omega_{\perp} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \omega_{\parallel} = \sqrt{M_{\infty}/\rho} \quad (4.82)$$

综上所述，波在态型 PD 材料中存在色散现象，这也是非均匀介质实验中比较常见的一个现象。这与本文第二章的结论一致，即非局部 PD 理论能够真实反映非均质介质的宏观力学性能。因此在实际应用中，对任一给定色散关系的非均匀介质，可通过色散关系匹配的思想，反推出态型 PD 的权函数，进而构建该材料的态型 PD 本构模


 图 4.6 不同泊松比的态型 PD 横波 (S 波) 特征 ($\ell/l_0 = 1$): (a) 色散关系; (b) 群速度和相速度

 图 4.7 静态集中载荷下的位移响应 ($\nu = -0.3$)

型，以此来刻画该材料的动态宏观响应。本文方法不局限于本文用到的权函数。

4.2.4.2 集中载荷下的静态响应

在三维无限大参考构型 \mathcal{B} 的原点处，作用一集中力 $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_0 \delta(\mathbf{x})$ 。由一般解 (4.55)，位移响应可表示为

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = [G_{\parallel}(x)\mathbf{n}_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{n}_{\mathbf{x}} + G_{\perp}(x)\mathbf{P}_{\mathbf{n}_{\mathbf{x}}}] \cdot \mathbf{P}_0 \quad (4.83)$$

上文已经提及，上式可分为两部分 $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^{\text{Dirac}}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^{\text{con}}(\mathbf{x})$ ，分别对应于格林函数中的 Dirac 函数和收敛积分，其中第一部分可写为 $\mathbf{P}_0 \delta(\mathbf{x})/M_{\infty}$ 。令权函数为高斯型且 $\nu = -0.3$ ，不同非局部特征长度 ℓ 下的响应如图 4.7 所示。随着 ℓ 的减小或在远离集中载荷的区域，态型 PD 的解均趋近于经典解。非局部效应仅影响集中载荷附近很小的邻域，且该邻域会随着非局部特征长度 ℓ 的减小而减小。

4.2.4.3 时间相关集中载荷下的动态响应

一线弹性杆在 $t = 0$ 处于静止状态, 在 $t > 0$ 时于原点处施加一个 Ricker 脉冲, 即

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \dot{u}(x, 0) = 0 \\ b(x, t) &= \frac{P}{A} \delta(x) (1 - 2\pi f_p^2 t^2) e^{-\pi f_p^2 t^2}, t > 0 \end{aligned} \quad (4.84)$$

其中 f_p 为峰值频率, A 为杆横截面积, P 为载荷幅值。将式 (4.84) 代入式 (4.54) 可得该问题的解析解

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{P (1 - 2\pi f_p^2 (t - \hat{t})^2) e^{-\pi f_p^2 (t - \hat{t})^2}}{A\rho} G(x, \hat{t}) d\hat{t} \quad (4.85)$$

引入无量纲化参数

$$\underline{X} = \frac{x}{l_0}, \quad \underline{T} = \frac{c_0 t}{l_0} \quad (4.86)$$

其中 $c_0 = \sqrt{E/\rho}$, $l_0 = \sqrt{A}$, E 为杨氏模量。令 $h = f_p l_0 / c_0$ 。则无量纲化的位移解可表示为

$$\begin{aligned} \underline{U}(\underline{X}, \underline{T}) &= \frac{E l_0}{P} u(l_0 \underline{X}, l_0 \underline{T} / c_0) \\ &= \int_0^{\underline{T}} (1 - 2\pi h^2 (\underline{T} - \underline{\hat{T}})^2) e^{-\pi h^2 (\underline{T} - \underline{\hat{T}})^2} \tilde{G}(\underline{X}, \underline{\hat{T}}) d\underline{\hat{T}} \end{aligned} \quad (4.87)$$

式中, $\tilde{G}(\underline{X}, \underline{T})$ 为无量纲格林函数

$$\tilde{G}(\underline{X}, \underline{T}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos \tilde{k} \underline{X} \frac{\sin(\tilde{\omega}(\tilde{k}) \underline{T})}{\tilde{\omega}(\tilde{k})} d\tilde{k} \quad (4.88)$$

其中, 无量纲色散关系 $\tilde{\omega}(\tilde{k})$ 为

$$\tilde{\omega}(\tilde{k}) = \frac{\omega(\tilde{k}/l_0)}{c_0/l_0} \quad (4.89)$$

式 (4.87) 到式 (4.89) 对经典线弹性方程仍适用。此时 $\tilde{\omega}(\tilde{k}) = \tilde{k}$, 无量纲位移为

$$\underline{U}(\underline{X}, \underline{T}) = \frac{1}{2} \int_{|\underline{X}|}^{\underline{T}} (1 - 2\pi h^2 (\underline{T} - \underline{\hat{T}})^2) e^{-\pi h^2 (\underline{T} - \underline{\hat{T}})^2} d\underline{\hat{T}} \quad (4.90)$$

选取高斯型权函数且 $h = 2$, 不同特征长度时, PD 和经典线弹性理论的结果如图 4.8 所示, 其中无量纲非局部特征长度为 $\gamma_0 = \ell/l_0$, 图 4.8(a) 为 $\underline{T} = 1$ 时刻的位移分布, 而图 4.8(b) 为物质点 $\underline{X} = 1$ 的位移响应。

由图 4.8(a) 和图 4.8(b) 可知, 在 $\underline{X} = 0.05$ 附近和 $\underline{T} = 1.25$ 附近, PD 的结果中存在明显的振荡, 这是由 PD 色散关系的非线性造成的。由色散关系可知波长越短, 波速越慢。可以看到振荡只存在于 PD 结果的尾部, 且振荡的波长和频率均逐渐减小 (如

图 4.8 (a) 和 (b) 蓝线所示), 说明计算结果和色散关系的理论预测吻合。另外 PD 结果的振荡随着 γ_0 的减小而逐渐消失, 当 $\gamma_0 \rightarrow 0$, PD 解趋于经典解。

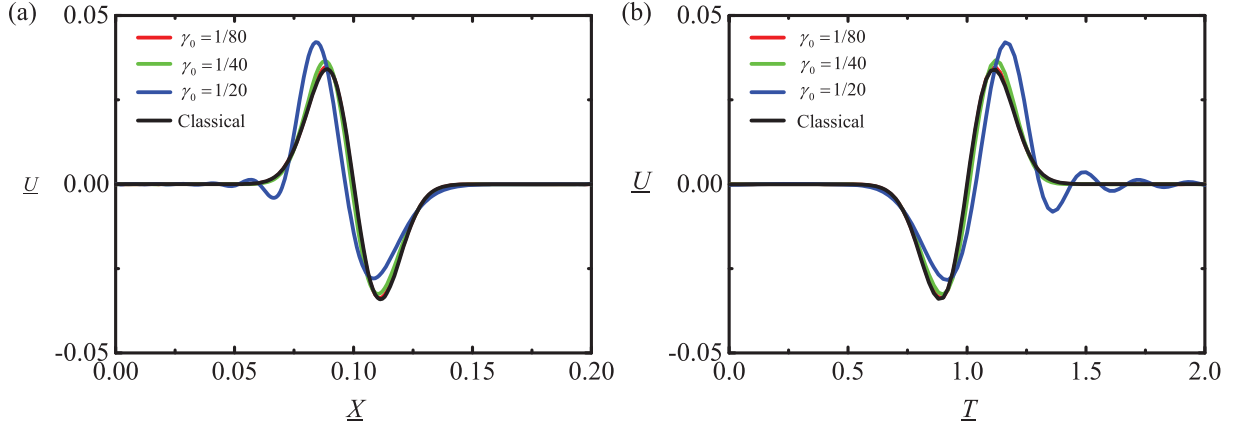


图 4.8 Ricker 集中载荷下的动态响应: (a) $T = 1$ 时刻的位移分布 (b) $X = 1$ 处的位移响应

4.3 PD 热扩散的格林函数解

4.3.1 PD 热扩散模型的一般解

本节采用格林函数法, 以三维空间中的热传导问题为例, 给出具有初始条件和边界条件的非稳态和稳态 PD 扩散方程的一般解。在三维各向同性介质 \mathcal{B} 中, 任一点 \mathbf{x} 的 PD 热扩散方程为^[109]

$$\rho c_v \dot{T}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathcal{B}} f_T(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}'} + q_b(\mathbf{x}, t) \quad t > 0, \mathbf{x} \in \mathcal{B} \quad (4.91)$$

其中 $\dot{T}(\mathbf{x}, t)$ 为在 t 时刻点 \mathbf{x} 的温度关于时间的导数; ρ 为密度; c_v 为比热容; f_T 为 PD 的双热流密度 (dual heat flow density) 函数或热响应函数。尽管 Oterkus 等^[109] 建立了态型 PD 热扩散模型, 但至今还未有态型 PD 热响应函数的报道, 文献中用到的热响应函数均为键型 PD 热响应函数, 其中线性键型 PD 热响应函数可表示

$$f_T(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) = K_s(\xi) [T(\mathbf{x}', t) - T(\mathbf{x}, t)] \quad (4.92)$$

其中 $\xi = |\mathbf{x}' - \mathbf{x}|$; $K_s(\xi)$ 为 PD 的微热导率函数。由于 PD 热扩散模型相对于 PD 弹性理论发展成熟较晚, 因此还有很多的机遇。比如可仿照线性化态型 PD 理论, 构建符合物理规律的线性化态型 PD 热响应函数。本小节重点探讨 PD 热扩散模型的求解, 仅关注已发展的键型 PD 热响应函数, 但本节理论框架对于线性化态型 PD 的热响应函数仍适用。下面给出方程 (4.91) 的边界条件。首先, 经典热传导方程的边界条件为

$$\kappa_i \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial n_i} + h_i T(\mathbf{x}, t) = g_i(\mathbf{x}, t), \quad t > 0, \mathbf{x} \in S_i, i = 1, 2, \dots, s \quad (4.93)$$

其中 κ_i 和 h_i 分别为热导率和边界与热交换系数; S_i 为第 i 个边界, s 为边界的总个数; $g_i(\mathbf{x}, t)$ 为给定的已知函数。若 $\kappa_i = 0$, 则 (4.93) 代表第一类边界条件 (Dirichlet 边

界); 若 $h_i = 0$, 则 (4.93) 代表第二类边界条件 (Neumann 边界); 否则为第三类边界条件 (Robin 边界)。而边界条件 (4.93) 对 PD 热扩散方程 (4.91) 来说是不适用的: 首先边界条件 (4.93) 中含有空间微分项与 PD 的思想不匹配; 另外, 更重要的是, 边界条件 (4.93) 和方程 (4.91) 构成的初-边值问题是不适定的^[139,143]。为此 Gunzburger 和 Du 等^[139,143] 提出了适用于 PD 的体约束边界条件

$$\mathcal{N}(f_T) + h_i T(\mathbf{x}, t) = g_i(\mathbf{x}, t), \quad t > 0, \mathbf{x} \in \Gamma_i, i = 1, 2, \dots, s \quad (4.94)$$

其中

$$\mathcal{N}(f_T) =: - \int_{\mathcal{B}} f_T(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}'}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_i, i = 1, 2, \dots, s \quad (4.95)$$

其中 Γ_i 可为 \mathcal{B} 内某一子域, 或与 \mathcal{B} 紧邻的某一区域。类似于经典边界条件, 上式也同时可表示以上提到的三类边界条件。方程 (4.91) 的初始条件为

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{B} \quad (4.96)$$

式 (4.91), (4.94) 和 (4.96) 构成了一个三维非稳态 PD 热扩散初-边值问题。接下来我们讨论其辅助问题, 即基本解问题: 除了点热源载荷外, 初始条件 (I. C.) 和体约束边界条件 (V. C.) 均为零, 即

$$\rho c_v \dot{G}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathcal{B}} f_G(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}'} + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \delta(t - t^*), \quad t > t^*, \mathbf{x} \in \mathcal{B} \quad (4.97a)$$

$$\text{V. C. } \mathcal{N}(f_G) + h_i G(\mathbf{x}, t) = 0, \quad t > t^*, \mathbf{x} \in \Gamma_i, i = 1, 2, \dots, s \quad (4.97b)$$

$$\text{I. C. } G(\mathbf{x}, t) = 0, \quad t < t^*, \mathbf{x} \in \mathcal{B} \quad (4.97c)$$

其中, $G(\mathbf{x}, t)$ 表示此时的温度响应, 热响应函数 $f_G(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t)$ 与 $f_T(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t)$ 有相同的形式; δ 为 Dirac 函数。辅助问题 (4.97) 的解记为格林函数 $G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}^*, t^*)$, 描述了点热源作用下 \mathcal{B} 中的温度响应。格林函数服从互易关系

$$G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}^*, t^*) = G(\mathbf{x}^*, -t^* | \mathbf{x}, -t) \quad (4.98)$$

其中, $t > t^*$ 。该关系的意义为温度响应仅与触发和响应之间的时间间隔和空间距离有关, 而与触发具体的时刻和位置无关。

由互易关系 (4.98), 方程 (4.97a) 可重新由 $G(\mathbf{x}^*, -t^* | \mathbf{x}, -t)$ 表示为

$$-\rho c_v \frac{\partial G(\mathbf{x}^*, -t^*)}{\partial t^*} = \int_{\mathcal{B}} f_G(\mathbf{x}', \mathbf{x}^*, -t^*) dV_{\mathbf{x}'} + \delta(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) \delta(t - t^*) \quad (4.99)$$

与此同时, 将方程 (4.91) 中的 t 和 \mathbf{x} 分别替换为 t^* 和 \mathbf{x}^* 得

$$\rho c_v \frac{\partial T(\mathbf{x}^*, t^*)}{\partial t^*} = \int_{\mathcal{B}} f_T(\mathbf{x}', \mathbf{x}^*, t^*) dV_{\mathbf{x}'} + q_b(\mathbf{x}^*, t^*) \quad (4.100)$$

方程 (4.99) 和方程 (4.100) 分别乘以 $T(\mathbf{x}^*, t^*)$ 和 $G(\mathbf{x}^*, -t^*)$ 后相减得

$$\rho c_v \frac{\partial}{\partial t^*} (GT) = G \int_{\mathcal{B}} f_T dV_{\mathbf{x}'} - T \int_{\mathcal{B}} f_G dV_{\mathbf{x}'} + G q_b(\mathbf{x}^*, t^*) - T \delta(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) \delta(t - t^*) \quad (4.101)$$

上式是关于 \mathbf{x}^* 和 t^* 的方程, 其中 $T(\mathbf{x}^*, t^*)$ 和 $G(\mathbf{x}^*, -t^*)$ 分别简记作 T 和 G , 且 $G =: G(\mathbf{x}^*, -t^*) = G(\mathbf{x}^*, -t^* | \mathbf{x}, -t) = G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}^*, t^*)$ 。将方程 (4.101) 分别关于变量 \mathbf{x}^* 的空间域 \mathcal{B} 和变量 t^* 的时间域 $[0, t + \varepsilon]$ 积分, 其中 ε 为任一较小的正数, 可得

$$\begin{aligned} \rho c_v \int_{\mathcal{B}} (GT) \Big|_0^{t+\varepsilon} dV_{\mathbf{x}^*} &= \int_0^{t+\varepsilon} \int_{\mathcal{B}} \left(G \int_{\mathcal{B}} f_T dV_{\mathbf{x}'} - T \int_{\mathcal{B}} f_G dV_{\mathbf{x}'} \right) dV_{\mathbf{x}^*} dt^* \\ &+ \int_0^{t+\varepsilon} dt^* \int_{\mathcal{B}} G q_b(\mathbf{x}^*, t^*) dV_{\mathbf{x}^*} - T(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (4.102)$$

根据非局部格林第二定理^[139, 143], 上式右端第一项可表示为

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \left(G \int_{\mathcal{B}} f_T dV_{\mathbf{x}'} - T \int_{\mathcal{B}} f_G dV_{\mathbf{x}'} \right) dV_{\mathbf{x}^*} &= \int_{\Gamma} [GN(f_T) - TN(f_G)] dV_{\mathbf{x}^*} \\ &= \sum_{i=1}^s \int_{\Gamma_i} [GN(f_T) - TN(f_G)] dV_i \end{aligned} \quad (4.103)$$

此外, 由于 $t + \varepsilon > t$, 即响应的时间早于触发的时间, 因此响应为零, 即 $G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}^*, t + \varepsilon) = 0$ 。那么式 (4.102) 左端的积分可写为

$$(GT) \Big|_0^{t+\varepsilon} = -(GT) \Big|_{t^*=0} = -G \Big|_{t^*=0} T_0(\mathbf{x}^*) \quad (4.104)$$

将式 (4.103) 和 (4.104) 代入式 (4.102), 并令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 可得

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}, t) &= \rho c_v \int_{\mathcal{B}} G \Big|_{t^*=0} T_0(\mathbf{x}^*) dV_{\mathbf{x}^*} + \int_0^t dt^* \int_{\mathcal{B}} G q_b(\mathbf{x}^*, t^*) dV_{\mathbf{x}^*} \\ &+ \int_0^t dt^* \sum_{i=1}^s \int_{\Gamma_i} [GN(f_T) - TN(f_G)] dV_i \end{aligned} \quad (4.105)$$

这里 $G = G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}^*, t^*)$, $G \Big|_{t^*=0} = G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}^*, 0)$ 。由边界条件 (4.94) 和 (4.97b), 可得

$$GN(f_T) - TN(f_G) = G \Big|_{\Gamma_i} g_i(\mathbf{x}^*, t^*) \quad (4.106)$$

其中 $G \Big|_{\Gamma_i}$ 表示格林函数在体积 Γ_i 内的值。则由格林函数表示的一般解为

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}, t) &= \rho c_v \int_{\mathcal{B}} G \Big|_{t^*=0} T_0(\mathbf{x}^*) dV_{\mathbf{x}^*} + \int_0^t dt^* \int_{\mathcal{B}} G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}^*, t^*) q_b(\mathbf{x}^*, t^*) dV_{\mathbf{x}^*} \\ &+ \int_0^t dt^* \sum_{i=1}^s \int_{\Gamma_i} G \Big|_{\Gamma_i} g_i(\mathbf{x}^*, t^*) dV_i \end{aligned} \quad (4.107)$$

对一维和二维问题, 可得到类似 (4.107) 的解, 这里不再赘述。

同样地, 对于稳态热传导问题

$$\int_{\mathcal{B}} f_T dV_{\mathbf{x}'} + q_b(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \mathcal{B} \quad (4.108a)$$

$$\text{B. C. } \mathcal{N}(f_T) + h_i T = g_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (4.108b)$$

其辅助问题为

$$\int_{\mathcal{B}} f_G dV_{\mathbf{x}'} + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) = 0 \quad \mathbf{x} \in \mathcal{B} \quad (4.109a)$$

$$\text{B. C. } \mathcal{N}(f_G) + h_i G = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (4.109b)$$

则问题 (4.107) 的解为

$$T(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{B}} G(\mathbf{x} | \mathbf{x}^*) q_b(\mathbf{x}^*) dV_{\mathbf{x}^*} + \sum_{i=1}^s \int_{\Gamma_i} G|_{\Gamma_i} g_i(\mathbf{x}^*) dV_i \quad (4.110)$$

由非稳态解 (4.107) 和稳态解 (4.110) 可知, 一般解依赖于格林函数。因此格林函数对解析求解 PD 热扩散问题有重要的意义, 特将无界域格林函数具体求解如下。

4.3.2 无界域格林函数

考虑到有限域体约束边界条件处理的复杂性, 本小节集中讨论无界域问题的格林函数求解。对于无界域问题, 方程 (4.107) 和 (4.110) 中 $s = 0$, 下面分别求解非稳态和稳态热传导下的格林函数解, 分别称为非稳态格林函数和稳态格林函数。

4.3.2.1 非稳态格林函数

对三维无限大均匀介质 \mathcal{B} , 辅助问题 (4.97) 可写为

$$\rho c_v \dot{G}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathcal{B}} f_G(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}'} + \Delta(\mathbf{x}, t), \quad t > t^* \quad (4.111a)$$

$$\text{I. C. } G(\mathbf{x}) = 0, \quad t < t^* \quad (4.111b)$$

其中 $f_G = K_s(\xi)[G(\mathbf{x}', t) - G(\mathbf{x}, t)]$, $\Delta(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \delta(t - t^*)$ 。对方程 (4.111)(a) 关于空间进行三维傅里叶变换, 可得

$$\rho c_v \dot{\bar{G}}(\mathbf{k}, t) + M(\mathbf{k}) \cdot \bar{G}(\mathbf{k}, t) = \bar{\Delta}(\mathbf{k}, t) \quad t > t^* \quad (4.112a)$$

$$\text{I. C. } G(\mathbf{k}) = 0, \quad t < t^* \quad (4.112b)$$

式中

$$M(\mathbf{k}) = \int_{\mathcal{B}} K_s(\xi) (1 - e^{i\mathbf{k} \cdot \xi}) dV_{\xi} \quad (4.113)$$

其中上划线表示傅里叶变换后相应的函数, $\xi = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$ 。由于 $K_s(\xi)$ 关于 ξ 对称, 式 (4.113) 可表示为

$$M(\mathbf{k}) = \int_{\mathcal{B}} K_s(\xi) (1 - \cos \mathbf{k} \cdot \xi) dV_{\xi} = 4\pi \int_0^l K_s(\xi) B(k\xi) \xi^2 d\xi \quad (4.114)$$

其中 $B(k\xi) = 1 - \frac{\sin(k\xi)}{k\xi}$, $k = |\mathbf{k}|$ 。

方程 (4.112a) 是关于 t 的一阶微分方程，其解为

$$\bar{G}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{\rho c_v} \int_0^t \bar{\Delta}(\mathbf{k}, \hat{t}) e^{-M(\mathbf{k})(t-\hat{t})/\rho c_v} d\hat{t} \quad (4.115)$$

由傅里叶逆变换及其卷积定理可得

$$G(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho c_v} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \Delta(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}, t - \hat{t}) F(\hat{\mathbf{x}}, \hat{t}) dV_{\hat{\mathbf{x}}} d\hat{t} \quad (4.116)$$

其中 $F(\hat{\mathbf{x}}, \hat{t}) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{-M(\mathbf{k})\hat{t}/\rho c_v} \right\}$ 。当 $t > t^*$ 时，由于 $\Delta(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \delta(t - t^*)$ ，式 (4.116) 可表示为

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}^*, t^*) &= \frac{1}{\rho c_v} F(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*, t - t^*) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3 \rho c_v} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)} \cdot e^{-M(\mathbf{k})(t-t^*)/\rho c_v} dV_k \\ &= \frac{1}{2\pi^2 \rho c_v} \int_0^{+\infty} \frac{k \sin(kr)}{r} \cdot e^{-M(\mathbf{k})(t-t^*)/\rho c_v} dk \end{aligned} \quad (4.117)$$

其中 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}^*|$ 。而当 $t < t^*$ 时， $G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}^*, t^*) = 0$ 。

类似地，可得二维问题的非稳态格林函数为

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}^*, t^*) &= \frac{1}{(2\pi)^2 \rho c_v} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)} \cdot e^{-M(\mathbf{k})(t-t^*)/\rho c_v} dA_k \\ &= \frac{1}{2\pi \rho c_v} \int_0^{+\infty} k J_0(kr) \cdot e^{-M(\mathbf{k})(t-t^*)/\rho c_v} dk \end{aligned} \quad (4.118)$$

式中

$$M(\mathbf{k}) = \int_B K_s(\xi) (1 - \cos \mathbf{k} \cdot \xi) dA_\xi = 2\pi \int_0^l K_s(\xi) B(k\xi) \xi d\xi \quad (4.119)$$

其中 $B(k\xi) = 1 - J_0(k\xi)$ ， $J_0(k\xi)$ 为零阶 Bessel 函数。一维问题的非稳态格林函数为

$$G(x, t | x^*, t^*) = \frac{1}{\pi \rho c_v} \int_0^{+\infty} \cos(kr) \cdot e^{-M(k)(t-t^*)/\rho c_v} dk \quad (4.120)$$

其中

$$M(k) = \int_B K_s(\xi) (1 - \cos k\xi) d\xi = 2 \int_0^l K_s(\xi) (1 - \cos k\xi) d\xi \quad (4.121)$$

4.3.2.2 稳态格林函数

稳态格林函数可通过直接法和间接法两种方法求得。首先介绍直接法，仍以三维稳态热传导为例，其辅助问题可表示为

$$\int_B f_G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}'} + \Delta(\mathbf{x}) = 0, \quad (4.122)$$

其中 $\Delta(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$ 。方程 (4.122) 关于 \mathbf{x} 进行傅里叶变换得

$$M(\mathbf{k}) \cdot \bar{G}(\mathbf{k}) = \bar{\Delta}(\mathbf{k}) \quad (4.123)$$

由傅里叶逆变换及其卷积定理得

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{x}|\mathbf{x}^*) &= \int_{\mathbb{R}^3} \Delta(\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}) \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{M(\mathbf{k})} \right\} dV_{\hat{\mathbf{x}}} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)} \cdot \frac{1}{M(\mathbf{k})} dV_{\mathbf{k}} \\
 &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{k \sin(kr)}{r} \cdot \frac{1}{M(\mathbf{k})} dk
 \end{aligned} \tag{4.124}$$

另外, 稳态格林函数由非稳态格林函数求极限得到, 即

$$G(\mathbf{x}|\mathbf{x}^*) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t G(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}^*, t^*) dt^* \tag{4.125}$$

将式 (4.117) 代入式 (4.125) 即可得到与式 (4.124) 一样的结果。下面给出式 (4.125) 的证明。

对非稳态热传导方程的辅助问题 (4.97), 两边用积分算子 $\int_0^t dt^*$ 运算, 并交换积分次序得

$$\rho c_v \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t G(\mathbf{x}, t) dt^* = \int_{\mathcal{H}_{\mathbf{x}}} \int_0^t f_G dt^* dV_{\mathbf{x}'} + \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*), \quad t > t^*, \mathbf{x} \in \mathcal{B} \tag{4.126a}$$

$$\text{B. C. } \mathcal{N}(\int_0^t f_G dt^*) + h_i \int_0^t G dt^* = 0, \quad t > t^*, \mathbf{x} \in \Gamma_i, i = 1, 2, \dots, s \tag{4.126b}$$

$$\text{I. C. } \int_0^t G dt^* = 0, \quad t < t^*, \mathbf{x} \in \mathcal{B} \tag{4.126c}$$

定义 $G^*(\mathbf{x}, t) := \int_0^t G dt^* = \int_0^t G(\mathbf{x}, t) dt^* = \int_0^t G(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}^*, t^*) dt^*$, 上式可表示为

$$\rho c_v \dot{G}^*(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathcal{B}} f_{G^*}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}'} + \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*), \quad t > t^*, \mathbf{x} \in \mathcal{B} \tag{4.127a}$$

$$\text{V. C. } \mathcal{N}(f_{G^*}) + h_i G^*(\mathbf{x}, t) = 0, \quad t > t^*, \mathbf{x} \in \Gamma_i, i = 1, 2, \dots, s \tag{4.127b}$$

$$\text{I. C. } G^*(\mathbf{x}, t) = 0, \quad t < t^*, \mathbf{x} \in \mathcal{B} \tag{4.127c}$$

若 h_i 非零, 则问题 (4.127) 可分解为一个稳态问题和一个非稳态问题的之和, 即

$$G^*(\mathbf{x}, t) = G_s(\mathbf{x}) + G_{us}(\mathbf{x}, t) \tag{4.128}$$

其中 $G_s(\mathbf{x})$ 满足稳态问题

$$\int_{\mathcal{B}} f_{G_s}(\mathbf{x}') dV_{\mathbf{x}'} + \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{B} \tag{4.129a}$$

$$\text{V. C. } \mathcal{N}(f_{G_s}) + h_i G_s(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_i, i = 1, 2, \dots, s \tag{4.129b}$$

而 $G_{us}(\mathbf{x}, t)$ 满足非稳态问题

$$\rho c_v \dot{G}_{us}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathcal{B}} f_{G_{us}}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}'}, \quad t > t^*, \mathbf{x} \in \mathcal{B} \tag{4.130a}$$

$$\text{V. C. } \mathcal{N}(f_{G_{us}}) + h_i G_{us}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad t > t^*, \mathbf{x} \in \Gamma_i, i = 1, 2, \dots, s \tag{4.130b}$$

$$\text{I. C. } G_{us}(\mathbf{x}, t) = -G_s(\mathbf{x}), \quad t < t^*, \mathbf{x} \in \mathcal{B} \tag{4.130c}$$

式 (4.129) 中的控制方程和边界条件与辅助问题 (4.109) 中的相同。由于没有外界激励,

问题 (4.130) 中的温度响应当 $t \rightarrow \infty$ 时, 将会逐渐衰减为零。因此,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G^*(\mathbf{x}, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [G_s(\mathbf{x}) + G_{us}(\mathbf{x}, t)] = G_s(\mathbf{x}) \quad (4.131)$$

上式即为式 (4.125)。

注意到有式 (4.124) 或式 (4.125) 得到的格林函数中的积分是发散的, 为此作类似于上一节中的处理。三维问题的稳态格林函数 (4.124) 可表示为

$$G(\mathbf{x} | \mathbf{x}^*) = \frac{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)}{M_\infty} + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{k \sin(kr)}{r} \cdot \left(\frac{1}{M(\mathbf{k})} - \frac{1}{M_\infty} \right) dk \quad (4.132)$$

其中 $M_\infty = 4\pi \int_0^l K_s(\xi) \xi^2 d\xi$; 对二维问题的稳态格林函数为

$$G(\mathbf{x} | \mathbf{x}^*) = -\frac{\ln(r)}{2\pi\kappa} + \frac{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)}{M_\infty} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} k J_0(kr) \cdot \left(\frac{1}{M(\mathbf{k})} - \frac{1}{M_\infty} - \frac{1}{\kappa k^2} \right) dk \quad (4.133)$$

其中 $M_\infty = 2\pi \int_0^l K_s(\xi) \xi d\xi$; 最后, 一维问题的稳态格林函数为

$$G(x | x^*) = -\frac{|r|}{2\kappa} + \frac{\delta(x - x^*)}{M_\infty} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos(kr) \cdot \left(\frac{1}{M(k)} - \frac{1}{M_\infty} - \frac{1}{\kappa k^2} \right) dk \quad (4.134)$$

其中 $M_\infty = 2 \int_0^l K_s(\xi) d\xi$ 。

4.3.3 算例

在初始条件为 $T(\mathbf{x}, 0) = T_c$ 的一个无限大板中心处施加一高斯热源 (图 4.9)

$$q_b(\mathbf{x}, t) = \frac{2Q}{\pi R^2} \exp\left(\frac{-2|\mathbf{x}|^2}{R^2}\right) \quad (4.135)$$

其中 Q 为单位长度上的功率; R 为有效加热半径。令热响应函数为

$$K_s(\xi) = \frac{12\kappa}{\pi l^3} \frac{1}{\xi} \quad (4.136)$$

将上式代入式 (4.118) 可得该问题的非稳态格林函数, 引入无量纲化参数

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{R}, \quad \tilde{T} = \frac{T - T_c}{T_c}, \quad \tilde{t} = \frac{\kappa t}{\rho c_v R^2} \quad (4.137)$$

则由一般解 (4.107) 可得无量纲化的温度场为

$$\frac{\tilde{T}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t})}{Q/T_c \kappa} = 2 \int_0^{+\infty} \int_0^\infty \tilde{k} \left(1 - e^{-\tilde{M}\tilde{t}}\right) J_0(\tilde{k}\tilde{r}) e^{-2\tilde{r}^{*2}} \tilde{r}^* d\tilde{r}^* d\tilde{k} \quad (4.138)$$

其中 $\tilde{r} = |\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}^*|$; $\tilde{r}^* = |\tilde{\mathbf{x}}^*|$ 。

无量纲化的非局部特征长度为 $\tilde{l} = l/R$ 。当 $\tilde{l} = 1$ 时的计算结果如图 4.9 所示, 其中图 4.9(a) 为 $\tilde{t} = 10$ 的温度场分布, 图 4.9(b) 为 $\tilde{y} = 0$ 的温度响应。可见随着非局部特征长度减小, PD 热扩散的结果收敛于经典热传导理论的结果, 且 PD 的变化较经典解慢。这是由非局部性造成的, 线性化态型 PD 的群速度往往小于经典值 (负泊松比情况除外)。

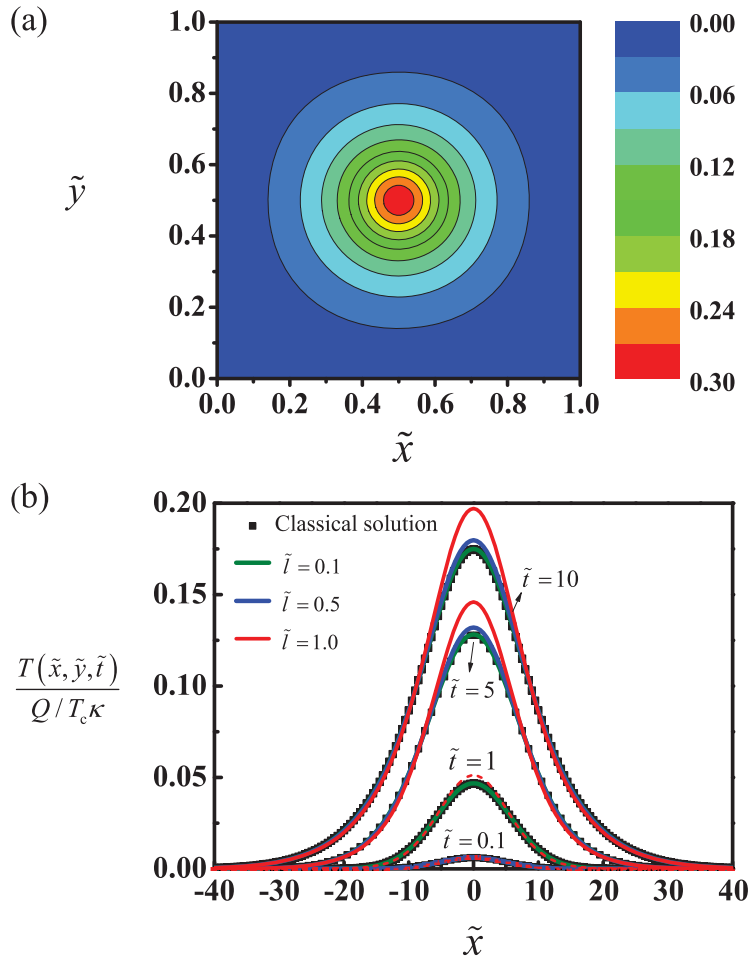


图 4.9 (a) $\tilde{t} = 10$ 时的温度场 ($\ell/R = 1$); (b) 在不同非局部特征长度下 $\tilde{y} = 0.5$ 处的温度响应

4.4 本章小结

本章基于积分变换及格林函数法等解析手段，研究了线性化态型 PD 的动态特性，得到了弹性波的色散关系、群速度和相速度等动态特性的具体表达式，给出了线性化态型 PD 的一般解及相应的动态和静态格林函数，分析了不连续场的间断条件及其演化规律，及非稳态和稳态热 PD 扩散问题的一般解和格林函数。主要研究工作和结论总结如下：

(1) 分析了非局部特征长度、泊松比和权函数对弹性波的色散关系、群速度和相速度的影响。主要表现为以下几点：其一，色散关系、群速度和相速度在非局部特征长度趋于零时均收敛于相应的经典解；其二，在长波极限处 ($k = 0$)，色散关系、群速度和相速度与经典理论相同，在短波极限处 ($k \rightarrow \infty$)，色散关系趋于有限值，群速度和相速度趋于零；其三，对于泊松比大于零的材料，PD 给出的色散关系、群速度和相速度总是小于相应的经典值，对于泊松比小于零的材料，以上三者短波极限附近某一范围内，大于相应的经典值，该现象颠覆了非局部理论给人的常规印象；其四，与连

续型权函数相比，截断型权函数的色散关系、群速度和相速度均出现了波动现象，在短波极限处的角频率极限值较大，而衰减速度较慢。

(2) 线性化态型 PD 的一般解可通过积分变换表达成格林函数卷积的形式，而直接由傅里叶积分逆变换得到的动态和静态格林函数的表达式均为发散积分。对于动态格林函数，其发散积分在一维到三维情况下均可表示为 Dirac 函数和收敛积分之和；对于静态格林函数，三维情况下，发散积分可表示为 Dirac 函数和收敛积分之和，而一维和二维情况下，则需分解为三部分：相应的经典静态格林函数、Dirac 函数和收敛积分。

(3) PD 理论不需要施加额外的条件，即可描述不连续物理场的变化规律。本章推得的不连续场间断条件表明，若某一面两侧存在速度间断，则该面在其法向方向上保持静止；反之，若某一面沿法向运动，则该面上速度场连续。不连续场的演化规律进一步表明，初始条件和体力的不连续均会导致位移场、速度场和加速度场的不连续，且不连续场演化方程在各分量方向上相互解耦，解耦后各分量遵循相同的演化规律。对于 PD 理论中常用的权函数，各分量呈现简谐变化，且对初始条件和体力的不连续扰动的响应是稳定的。

(4) PD 热扩散的一般解及格林函数与经典理论具有相似的形式，且在非局部特征长度趋于零时收敛于经典解。其稳态格林函数同样可分解为特殊函数和收敛积分之和。算例表明非稳态 PD 热扩散响应的变化滞后于相应的经典解。

第五章 基于近场动力学的动态界面问题研究

5.1 引言

正如近场动力学 (PD) 名字所示, PD 的基本任务之一是解决力学或其他物理系统中的动态问题, 与此同时, PD 的最大优势是处理不连续问题。因此基于近场动力学开展动态不连续问题的研究, 对于发挥 PD 的优势, 推动 PD 的应用及解决工程实际问题均具有重要的现实意义。动态界面问题则是典型的动态不连续问题, 这是由于界面的存在往往伴随着材料性能的不连续。本节将基于 PD 研究两类动态界面问题。

第一类是材料或其他物理系统中真实存在的界面传播问题, 该类问题广泛存在于能量函数有多个极小值的物理系统中。在平衡状态下, 系统可能“卡在 (stuck)”一个亚稳态的能量阱中。在适当的外部刺激下 (例如力), 该系统将从亚稳态向稳态转变。在此过程中将会出现一个 kink 过渡前沿 (kink transition front), 系统在前沿经过的区域发生转变。该现象常见于大量的系统中, 如机械系统 (摩擦力^[144]、CNT 泡沫的动力学^[145]、机械传输线^[146]); 材料系统 (位错运动^[147]、铁磁畴壁运动^[148]、公度相变^[149]、表面化学吸附^[150]); 电磁系统 (Josephson 结的磁通传播^[151]); 生物系统 (神经生理学中的脉冲传播^[152] 和旋转的 DNA 碱基^[153]); 甚至是交通流量系统^[153]。在上述系统中, 确定转变速度与外界刺激之间的关系, 即动力学关系, 是一个有重大意义的课题。

为此, 研究者们主要基于晶格模型和连续介质模型两类模型, 相继开展了大量的关于 kink 传播的研究。晶格模型是由 Frenkel 和 Kontorova^[147] 于 1938 年提出的, 又称为 FK 模型。研究者们基于晶格模型取得了一系列的研究成果^[154-160], 具体可参见 Braun 和 Kivshar 的综述文献^[161] 和 Slepyan 的著作^[162]。需要注意的是, Atkinson 和 Cabrera^[154] 指出, 当 FK 模型的能量函数为双二次型的双势阱时, 由其动力学关系无法确定较小速度所对应的外力值。另外, 也有一部分文献利用连续介质模型研究了 kink 传播。例如最简单的经典线弹性模型 (在每个物质点附加一个双二次型的双势阱)^[163-165], 该模型缺乏特征尺度, 在给定外力的情况下, 无法由其动力学关系唯一确定出相应的 kink 传播速度。为此研究者又提出了考虑应变梯度效应的 Boussinesq 近似模型^[163-165]。但 Kresse 和 Truskinovsky^[165] 指出该模型在短波长处不稳定, 为此提出了研究 kink 传播的准连续模型^[166]。准连续模型可看作是保留了 Mindlin 应变梯度理论中的^[83] “micro-inertia” 项。关于 kink 传播更详尽精细的描述见相关文献^[161, 167, 168]。PD 作为一个具有特征长度的非局部理论, 具有克服晶格模型、经典线弹模型和 Boussinesq 近似模型上述缺点的潜力, 且独具处理不连续问题的特点, 但关于 kink 传播的 PD 模型的相关研究仍是空白。

第二类是波在界面的透射和反射问题，这里的界面包括两相材料的界面，和用有限域模拟无限域问题时产生的人工界面或边界，常见于固体力学、流体力学、声学、电磁学和量子力学等众多领域^[169,170]及多尺度模拟中。对于材料界面，根据界面两侧的材料性质，波传播只需遵循相应的反射和透射规律，不需要对界面做特殊处理。对于人工界面，若对不做任何处理，波会在该界面产生反射。由于人工边界在真实的物理问题（无限域问题）中并不存在，因此该反射是不符合物理事实的不合理的反射。为了消除这一不合理性，需对人工边界作特殊处理，以实现在该处的反射为零。为此，研究者们发展了许多不同的人工边界条件，大致可分为两类：一类是将出射波以衰减的形式吸收掉，如基于经典理论的完美匹配层（PML）^[171,172]和基于键型 PD 理论的 PML^[172]；另一类是令边界条件满足一定的波动规律，使出射波几乎完全透射、不存在反射^[170,173]。为了便于区分，我们将以上两类人工边界条件分别称之为吸收边界条件和透射边界条件。相比于吸收边界条件，透射边界条件能够在保证出射波无反射的同时，实现入射波不失真的注入。该优点在动态多尺度计算方面具有重要的应用，而关于 PD 的透射边界条件研究仍是空白。因此开展 PD 透射边界条件的研究对于拓展 PD 的应用领域，及建立基于 PD 的动态多尺度框架具有重要意义。

针对以上两问题及其研究现状，本节基于一维 PD 理论框架，研究了 kink 传播中的平衡构形、动态封闭解及动力学关系，探讨了 PD 模型与其他连续介质模型之间的转化关系；随后，建立了 PD 的透射边界条件、非线性问题的线性化透射边界条件、双向边界条件，并用其模拟了含有缺陷损伤的材料和复合材料中弹性波的传播，以及由震源产生的弹性波的传播。

5.2 一维 kink 传播

5.2.1 问题描述及预备知识

考虑（一维的）一排粒子，在参考构型中，各粒子等间距分布，间距为 d ，第 n 个粒子的位置为 $x = nd$ ，其中 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。第 n 个粒子在时刻 t 垂直（或平行）于粒子链方向的位移记作 $u_n(t)$ 。

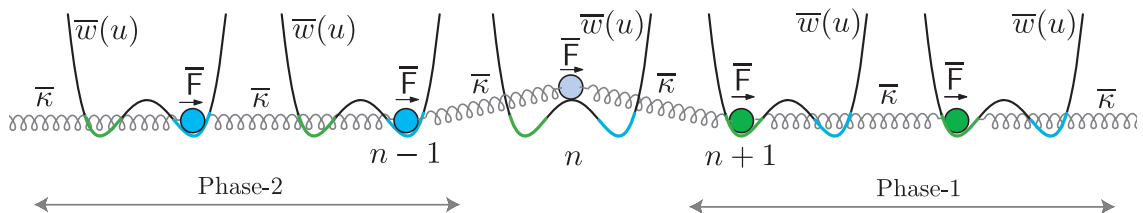


图 5.1 具有最近邻相互作用的一维排布的粒子示意图，每个粒子上附加一个双势阱函数 $\bar{w}(u)$

每个粒子的质量为 m ，并通过线性弹簧与周围 N 个近邻的粒子相连。特别地，第 n 个粒子通过一个刚度为 $\bar{\kappa}_m$ 、初始长度为 md 的弹簧与第 $n+m$ 个粒子相连，其中 $m = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$ 。每个粒子受到的外载荷为 \bar{F} ，同时通过一个具有双势阱 $\bar{w}(u)$ 的非线性弹簧固定于基础上，如示意图 5.1 所示。 \bar{w} 的两极小值分别在 $u = 0$ 和 $u = d$ 。由此，第 n 个粒子的运动方程可表示为

$$\sum_{m=1}^N \bar{\kappa}_m [u_{n+m}(t) - 2u_n(t) + u_{n-m}(t)] + \bar{F} - \bar{w}'(u_n(t)) = m\ddot{u}_n(t), \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (5.1)$$

方便起见，令

$$u_n(t) = u(x, t), \quad x = nd$$

其中 $u(x, t)$ 是一个定义在 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ 上的光滑函数。则方程 (5.1) 可表示为一个微分方程

$$\sum_{m=1}^N \kappa_m \frac{u(x+md, t) - 2u(x, t) + u(x-md, t)}{d^2} + F - w'(u(x, t)) = \rho u_{tt}(x, t) \quad (5.2)$$

其中已令 $\rho = m/d^3$, $\kappa_m = \bar{\kappa}_m/d$, $F = \bar{F}/d^3$, $w = \bar{w}/d^3$ 。

为了能够解析地得到位移场的显式封闭解，假设双势阱 w 为双二次型 (bi-quadratic):

$$w(\xi) = \begin{cases} \frac{\mu}{2} u^2, & u \leq u_* \\ \frac{\mu}{2} (u-d)^2 + \mu \left(u_* - \frac{1}{2}d \right) d, & u \geq u_* \end{cases} \quad (5.3)$$

其中 μ 和 u_* 为大于零的常数。注意到 w 在 $u = 0$ 和 $u = d$ 有极小值——势阱，在 $u = u_*$ 有极大值。某粒子的位移若小于 u_* ，则该粒子在“phase-1” (相 1)；若超过了 u_* ，则该粒子在“phase-2” (相 2)。与此双势阱相关的力^① $f = f(u) = w'(u)$ 是双线性的:

$$f(u) = w'(u) = \begin{cases} \mu u, & u < u_* \\ \mu(u-d), & u > u_* \end{cases} \quad (5.4)$$

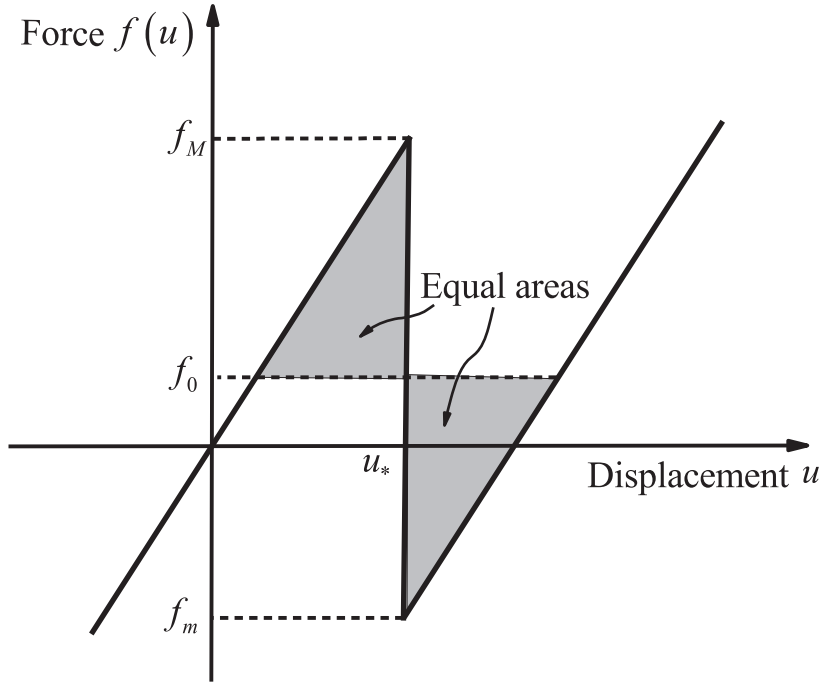
方便起见，令 f_m , f_M 和 f_0 作为力水平 (force levels)

$$f_m := f(u_*^+) = \mu(u_* - d), \quad f_M := f(u_*^-) = \mu u_*, \quad f_0 := \frac{1}{2}(f_m + f_M) = \mu \left(u_* - \frac{d}{2} \right) \quad (5.5)$$

它们的意义如图 5.2 所示。如果力超过了 f_M ，则任一粒子均在 phase-2；如果力比 f_m 小，则任一粒子均在 phase-2。当力等于 f_0 时，如图 5.2 所标示的两面积相等， f_0 又称为 Maxwell 力，此时 f_0 对应了两个位移值，分别小于和大于 u_* ，两位移对应的势能相等。

在均匀平衡构形下，所有粒子的位移相同，即 $u(x, t) = u$ ，由方程 (5.2) 可知， u 为

① 为了术语上的简化，我们将 F 、 $f = w'$ 、 f_m 、 f_M 和 f_0 均称作“力”尽管它们实际上是力密度（单位体积上的力）。


 图 5.2 式 (5.4) 中力 f 与位移 u 的关系

方程 $w'(u) = F$ 的根。对于双二次型势阱(5.3)来说, 由图 5.2 易知, 当外力满足

$$f_m < F < f_M \quad (5.6)$$

均匀平衡构形有两种可能的平衡位移 u^\pm :

$$u^+ := \frac{F}{\mu}, \quad u^- := \frac{F}{\mu} + d \quad (5.7)$$

位移 u^+ 和 u^- 分别位于 phase-1 和 phase-2。假设力 F 的值已知, 且位于式 (5.6) 所示的范围内, 则由式 (5.7) 定义的 u^\pm 须服从

$$u^+ < u_* < u^-$$

本文用单词 “kink” 表示如下构形: kink 前面的所有粒子均处于 phase-1, 而其后的所有粒子均处于 phase-2。由于均匀平衡构形下所有粒子要么均处于 phase-1, 要么均处于 phase-2, 则由 kink 定义可知, 均匀平衡构形下不存在 kink。在接下来的两小节 5.2.2 和 5.2.3 中, 我们主要关注 kink 的稳定传播: 假设第 n 个粒子在 $t < n\tau$ (τ 为非负常数) 时仍处于 phase-1; 当 $t = n\tau$ 时进入 phase-2 并在 $t > n\tau$ 时一直保持在 phase-2:

$$u_n(t) \begin{cases} < u_*, & t < n\tau \\ = u_*, & t = n\tau \\ > u_*, & t > n\tau \end{cases}$$

依此类推, 第 $(n+1)$ 个粒子在 $t = (n+1)\tau$ 时进入到 phase-2, 该运动持续不断地使粒

子一个接一个的从 phase-1 转变到 phase-2。则 kink 的稳定传播可描述为

$$u_n(t) = u_{n+m}(t + m\tau) \quad \forall n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.8)$$

上式中, 令 $m = -n$ 可得 $u_n(t) = u_0(t - n\tau) = u_0(t - nd/c)$, 其中 $c = d/\tau$ 为 kink 的传播速度, 则位移场可表示为行波形式

$$u_n(t) = u(z) \quad \text{其中 } z = nd - ct$$

由于 kink 前方的粒子仍在 phase-1 保持平衡, 因此当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $u_n(t) \rightarrow u^+$, 即当 $z \rightarrow +\infty$ 时, $u(z) \rightarrow u^+$ 。

5.2.2 经典线弹性模型

研究 kink 传播的经典线弹模型的控制方程可由式 (5.2) 得到, 将式 (5.2) 中的有限差分项替换为 u 的二阶空间导数可得

$$Eu_{xx} + F - w'(u) = \rho u_{tt}, \quad E = \sum_{m=1}^N m^2 \kappa_m$$

Abeyaratne 和 Vedantam^[163]、以及 Kresse^[164] 研究了上述方程的稳定的行波解 $u = u(z)$, $z = x - ct$, 其中 $z = 0$ 前的粒子处于 phase-1, 其后的粒子处于 phase-2。稳定行波解 $u(z)$ 满足以下几点要求: $u(z)$ 和应变 $u'(z)$ 连续, 且

$$u(z) \rightarrow u^+ \quad \text{当 } z \rightarrow +\infty$$

在亚音速传播的情况下 $c < c_0$ ($c_0 = \sqrt{E/\rho}$ 为材料中波传播的速度), 行波解可表示为

$$u(z) = \begin{cases} u^+ + \frac{u^- - u^+}{2} e^{-\beta_0 z}, & z \geq 0, \\ u^- - \frac{u^- - u^+}{2} e^{\beta_0 z}, & z \leq 0, \end{cases} \quad \text{其中 } \beta_0 = \sqrt{\frac{\mu}{(c_0^2 - c^2)}} > 0 \quad (5.9)$$

动力学关系为

$$F = f_0, \quad 0 < c < c_0 \quad (5.10)$$

上式表明在亚音速情况下, 无论 kink 传播速度如何, 力都必须等于 Maxwell 力 f_0 。

在超音速传播的情况下 $c > c_0$, 行波解为

$$u(z) = \begin{cases} u^+, & z \geq 0, \\ u^- - (u^- - u^+) \cos \alpha_0 z, & z \leq 0, \end{cases} \quad \text{其中 } \alpha_0 = \sqrt{\frac{\mu}{(c^2 - c_0^2)}} > 0 \quad (5.11)$$

动力学关系为

$$F = f_M, \quad c > c_0 \quad (5.12)$$

上式表明在超音速的情况下, 无论 kink 传播速度如何, 力都必须等于 f_M , 如图 5.2 所

示。

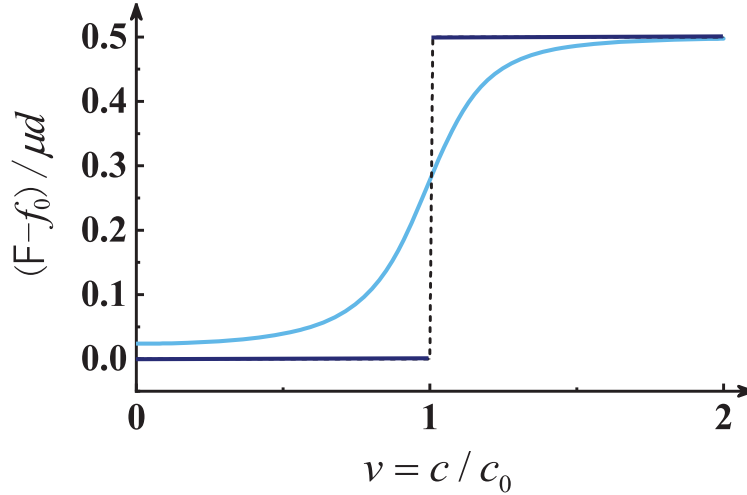


图 5.3 动力学关系：上下两水平实线分别代表经典线弹模型的动力学关系 (5.12) 和 (5.10)；曲线代表 PD 模型的动力学关系 (5.44)

图 5.3 中的上下水平实线表示式 (5.10) 和 (5.12) 描述的动力学关系，即力 F 和传播速度 c/c_0 的关系（曲线为下文确定的 PD 模型的动力学关系）。在亚音速的情况下，稳态解 (5.9) 在 kink 的两个方向均呈指数衰减，而在超音速的情况下，kink 后方出现了无衰减的振荡波（见式 (5.11)），这些振荡波中的辐射能量描述了“耗散（dissipation）”，该情况下 F 大于 Maxwell 力 f_0 。

5.2.3 一维 kink 的 PD 模型

PD 模型同第 5.2.1 节中的离散模型一样考虑了长程作用力的影响，在一维线性均匀键型 PD 中，粒子 $x + \xi$ 作用在粒子 x 上单位长度的力可表示为

$$C(\xi)[u(x + \xi, t) - u(x, t)]$$

作为一种描述 kink 传播的非局部连续介质模型，PD 模型的运动方程可表示为

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\xi)[u(x + \xi, t) - u(x, t)] d\xi + F - w'(u(x, t)) = \rho u_{tt} \quad (5.13)$$

上式中微模量函数 $C(\xi)$ 表征了材料性质。基本物理规律要求 C 满足：(i) 对称性： $C(\xi) = -C(-\xi)$ ；(ii) 在无穷远处衰减：当 $\xi \rightarrow \pm\infty$ ， $C(\xi) \rightarrow 0$ ；(iii) 在极限 $\ell \rightarrow 0$ 情况下 $C(\xi)$ 趋近于一个合适的广义函数。注意到，在 PD 模型中粒子在一定距离范围内存在相互作用，因此无需求位移场连续。例如，假设微模量函数 $C(x)$ 在 $|x| < \ell$ 范围内非零，在 $|x| > \ell$ 的范围内为零，其中 $\ell > 0$ ，即使位移场存在间断，若间断值小于 ℓ ，则连续体仍可保持连贯（coherent）。

选取 PD 模型的微模量函数为

$$C(x) = \frac{E}{2\ell^3} e^{-|x|/\ell} \quad (5.14)$$

其中弹性模量 $E > 0$ 和长度 $\ell > 0$ 为材料常数。采用该微模量函数的动机是该函数是 Silling^[14] 在探究非局部起源时自然推导得出的，具有较为明确的物理机制（详见第 2.4.3 节）。注意到，如果将微模量函数 (5.14) 替换为

$$C_D(x) = \sum_{m=1}^N \frac{\kappa_m}{d^2} [\delta(x-md) + \delta(x+md)] \quad (5.15)$$

其中 δ 为 Dirac 函数，则 PD 模型的运动方程 (5.13) 将变为离散模型的运动方程 (5.2)。将运动形式 $u(x,t) = e^{i(kx-\omega t)}$ 代入运动方程 (5.2) 和 (5.13)，并令 F 和 $w'(u)$ 等于零，可得离散模型和 PD 模型的色散关系分别为

$$\left. \begin{array}{l} \text{离散} \quad \rho\omega^2 = \int_{-\infty}^{\infty} C_D(\xi)(1 - \cos k\xi) d\xi = \sum_{m=1}^N 2\frac{\kappa_m}{d^2}(1 - \cos mkd) \\ \text{PD} \quad \rho\omega^2 = \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi)(1 - \cos k\xi) d\xi = \frac{E}{d^2} \frac{(kd)^2}{1 + (kd)^2 \ell^2/d^2} \end{array} \right\} \quad (5.16)$$

通过匹配两模型的色散关系，可以确定微模量函数 (5.14) 的参数 E 和 ℓ 。例如，令式 (5.16)₁ 和式 (5.16)₂ 在长波极限 $kd \rightarrow 0$ 处相等，可得

$$E = \sum_{m=1}^N m^2 \kappa_m$$

在短波极限 $kd \rightarrow \infty$ 处，由 PD 的色散关系 (5.16)₂ 可得

$$\frac{\omega^2 d^2}{c_0^2} \rightarrow \frac{d^2}{\ell^2}$$

而离散模型的色散关系在短波极限下振荡，因此可以通过匹配一些理想的平均特性来确定 ℓ/d 的值。令 $\kappa_m = \kappa/m$, $N = 3$, $E = \kappa N(N+1)$ ，两色散关系 (5.16)₁ 和 (5.16)₂ 如图 5.4 所示，其中 $\omega^2 d^2/c_0^2$ 和 kd 分别为纵、横坐标。图中的三条虚线分别是 ℓ/d 取不同值时的 PD 色散关系，该图展示了如何通过选取不同的 ℓ/d 实现 PD 模型和离散模型在不同要求下的匹配。当然，我们可以使用含有更多参数的微模量函数，来匹配色散关系的更多细节。至此，我们完成了 PD 模型的构建及其参数的确定。本小节 (5.2.3 节) 所考虑的 PD 模型由方程 (5.13) 和式 (5.14) 表征。

最后，有必要介绍一下函数 $M(k)$ ，它可由微模量函数定义为

$$M(k) := \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi)[1 - e^{-ik\xi}] d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi)[1 - \cos k\xi] d\xi \quad (5.17)$$

其中第二个等号用到了 $C(\xi)$ 的偶函数性质。函数 $M(k)$ 在接下来的推导中扮演重要的角色 (已经在 (5.16)₂ 出现)，它是声学张量 (4.32) 的一维形式，这里称之为声学函数

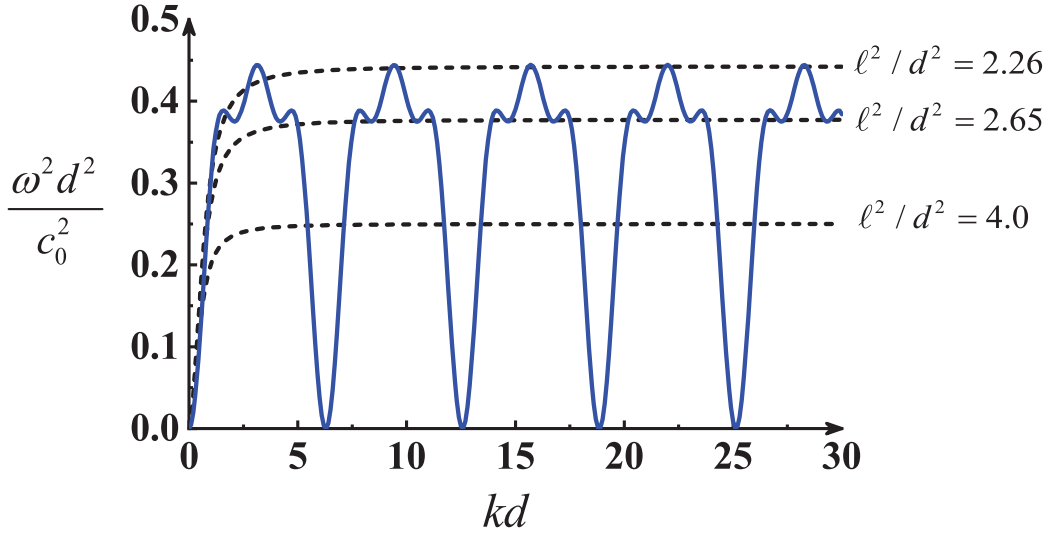


图 5.4 离散模型 ($N=3$, 实线) 和不同 ℓ/d 取值下的 PD 模型的色散关系 (虚线)

(acoustic function)。当微模量函数为指数形式 (5.14) 时, 声学函数为

$$M(k) = E \frac{k^2}{1 + k^2 \ell^2}$$

5.2.3.1 Kink 的平衡构形

对于平衡构形 $u(x, t) = u(x)$, PD 的运动方程 (5.13) 退化为平衡方程:

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) [u(x + \xi) - u(x)] d\xi + F - w'(u(x)) = 0 \quad (5.18)$$

若平衡构形为均匀平衡构形 (此时不存在 kink), 则所有点 x 的位移相同, 即 $u(x) = u$ 。此时外力 F 满足式 (5.6), 由方程 (5.18) 和式 (5.4) 知, 位移为 $u^+ = F/\mu$ 或 $u^- = F/\mu + d$ 。

若平衡构形为非均匀平衡构形, 所有 $x > 0$ 的点处于 phase-1, 所有 $x < 0$ 的点处于 phase-2, 且

$$u(x) \rightarrow u^\pm \quad \text{当 } x \rightarrow \pm\infty \quad (5.19)$$

则要求解的位移场 $u(x)$ 须满足

$$u(x) \begin{cases} < u_*, & x > 0 \\ > u_*, & x < 0 \end{cases} \quad (5.20)$$

由式 (5.20) 可得 $H(u(x) - u_*) = H(-x)$, 其中 $H(x)$ 是 Heaviside 阶跃函数, 则双二次型能量函数 (5.3) 可表达为

$$w'(u(x)) = \mu u(x) - \mu d H(-x)$$

则平衡方程 (5.18) 可写为

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\xi)[u(x+\xi) - u(x)] d\xi - \mu u(x) = -\mu u^- - \mu(u^+ - u^-)H(x) \quad (5.21)$$

对于满足式 (5.6) 的任一外力 F ，基于 PD 模型的 kink 平衡构形的位移场 $u(x)$ 应满足式 (5.21)，(5.19) 和 (5.20)，且 u^\pm 由式 (5.7) 确定。

在求解满足以上要求的位移场之前，我们注意到 $w'(u(x))$ 在 $x=0$ 不连续，意味着 $u(x)$ 在 $x=0$ 也不连续。为了计算 u 在 $x=0$ 的跳跃值（即左右极限之差），我们将点 $x = +\varepsilon > 0$ 和 $x = -\varepsilon < 0$ 处的运动方程 (5.21) 相减，并令 $\varepsilon \rightarrow 0$ ，可得

$$-[[u]] \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) d\xi - \mu [[u]] = -\mu(u^+ - u^-) \quad (5.22)$$

其中，记号 $[[g]]$ 表示函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 的跳跃值：

$$[[g]] := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{g(+\varepsilon) - g(-\varepsilon)\}$$

因此 u 在 $x=0$ 的跳跃值为

$$[[u]] = -\frac{\mu d}{\mu + \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) d\xi} \quad (5.23)$$

上式中用到了式 (5.7)。将指数微模量函数 (5.14) 代入上式可得

$$[[u]] = -d \frac{\beta}{1 + \beta}, \quad \beta := \frac{\mu \ell^2}{E} \quad (5.24)$$

在第 4.2.3 节中，我们曾研究了 PD 模型的不连续跳跃，并指出不连续跳跃沿间断面的法向不能传播。由上述结论可知，一维问题中的不连续跳跃不能传播。实际上，我们在下文研究中发现当 kink 稳定传播时确实不存在位移不连续。

若方程 (5.21) 中的微模量函数为 (5.14)，利用傅里叶变换及其逆变换可求得位移场为

$$u(x) = \frac{u^+ + u^-}{2} + \frac{\mu d}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{kL(k)} dk \quad (5.25)$$

式中

$$L(k) = M(k) + \mu = \frac{\mu d^2}{b^2(k^2 \ell^2 + 1)} \left(k^2 + \frac{b^2}{d^2} \right) \quad (5.26)$$

其中

$$b := \frac{d}{\ell} \frac{1}{\sqrt{1 + 1/\beta}} \quad (5.27)$$

式 (5.25) 中的积分可理解为 Cauchy 主值，可由留数定理求得，具体求解过程如下。

首先分析 (5.26) 可知，式 (5.25) 中的被积函数有三个奇点：一个为 $k=0$ ，另外两个为 $L(k)$ 的零点（纯虚数）；其次，选取积分路径 Γ ，使其沿着复平面 k 的实轴，和上

半平面中以 ε 为半径、 $k=0$ 为圆心的半圆 \mathcal{S}_ε ^①，复平面 k 和积分路径如图 5.5 所示。则所求的积分等于 Γ 上的积分和 \mathcal{S}_ε 上的积分之差在 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时的极限值。易知 \mathcal{S}_ε 上的积分在 $\varepsilon \rightarrow 0$ 为 $-d/2$ ，则式 (5.25) 可写为

$$u(x) = u^- + \frac{\mu d}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{-ikx}}{kL(k)} dk$$

Γ 上的积分可通过留数定理，在 $x > 0$ 时和 $x < 0$ 时，分别在下半平面和上半平面选取一个大的半圆来求得。最后可得

$$u(x) = \begin{cases} u^+ + \frac{d}{2} \frac{1}{1+\beta} e^{-bx/d}, & x > 0 \\ u^- - \frac{d}{2} \frac{1}{1+\beta} e^{bx/d}, & x < 0 \end{cases} \quad (5.28)$$

其中 β 和 b 分别同式 (5.24) 和 (5.27)。

由式 (5.28) 可知

$$u(0^+) = u^+ + \frac{d}{2} \frac{1}{1+\beta}, \quad u(0^-) = u^- - \frac{d}{2} \frac{1}{1+\beta} \quad (5.29)$$

将上式中的两式作差可得式 (5.24)，即解析解 (5.28) 验证了间断条件 (5.24) 的正确性。

另外，解 (5.28) 须满足式 (5.20)，即要求 $u(0^+) < u_* < u(0^-)$ 。将式 (5.29) 和式 (5.7) 代入 $u(0^+) < u_* < u(0^-)$ 可得，外力 F 须满足

$$f_0 - \frac{\mu d}{2} \frac{1}{1+1/\beta} < F < f_0 + \frac{\mu d}{2} \frac{1}{1+1/\beta} \quad (5.30)$$

其中 Maxwell 力 f_0 同式 (5.5)₃。由式 (5.5) 不难发现，式 (5.30) 最右边的表达式小于 f_M ，而最左边的表达式大于 f_m 。因此由式 (5.30) 确定的外力的区间为区间 (f_m, f_M) 的子集，且 Maxwell 力 f_0 为式 (5.30) 区间内的一元素。

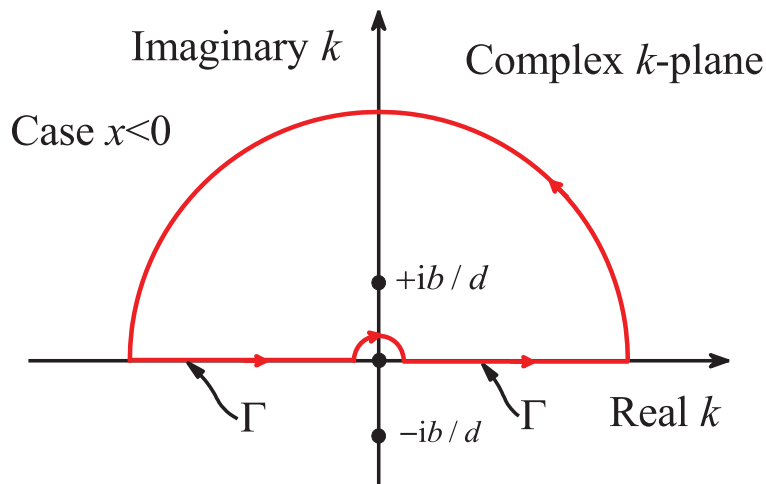


图 5.5 平衡的 kink: 复平面 k 中的奇点和积分路径 ($x < 0$ 的情况)

① 为了在无穷远处得到正确的条件，积分路径选取上半圆而不是下半圆。

5.2.3.2 Kink 的稳定传播解

我们现在考虑 kink 的稳定传播, 该传播的速度为常数 c (待定), 则此时的位移场可表示为

$$u(x, t) = u(z) \quad \text{其中} \quad z = x - ct$$

将上式代入 PD 的运动方程 (5.13) 得

$$\rho c^2 u''(z) - \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) [u(z + \xi) - u(z)] d\xi + w'(u(z)) = F \quad (5.31)$$

由前文 kink 的定义可知 kink 一侧的点处于 phase-1, 另一侧的点处于 phase-2, 即位移场满足

$$u(z) \begin{cases} < u_*, & z > 0 \\ = u_*, & z = 0 \\ > u_*, & z < 0 \end{cases} \quad (5.32)$$

根据 (5.31), 在动态情况下, $w'(u(z))$ 在 $z = 0$ 的不连续性要求 $u''(z)$ 在 $z = 0$ 不连续, u 和 u' 则允许是连续的。因此我们在式 (5.32) 中要求 $u(0) = u_*$, 这恰与静态问题相反。对于 u'' 的跳跃, 由方程 (5.31) 可知 $\rho c^2 [[u'']] + [[w'(u)]] = 0$, 由此

$$[[u'']] = -\frac{[[w'(u)]]}{\rho c^2} = -\frac{\mu d}{\rho c^2} \quad (5.33)$$

最后, 对于远场条件, 我们假设 kink 前面的所有粒子平衡于 phase-1。回顾式 (5.7)₁, 我们选取

$$u(z) \rightarrow u^+ = \frac{F}{\mu} \quad \text{当} \quad z \rightarrow +\infty \quad (5.34)$$

对于 kink 后面的远场粒子, 我们仅要求它们位于 phase-2, 并不要求它们处于平衡状态。所以当 $z \rightarrow -\infty$ 时, 除式 (5.32)₃ 外, 我们不作过多的要求, 允许粒子在 phase-2 能量阱中振荡。当然我们也可以提出更强的要求, 例如令波阵面后面的所有粒子的平均位移为 u^- (u^- 由式 (5.7) 给出), 但没有必要这样做, 因为由下文的结果可知该要求是自动满足的。

将双二次型势阱 (5.3) 代入方程 (5.31) 可得

$$\rho c^2 u''(z) - \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) [u(z + \xi) - u(z)] d\xi + \mu u(z) = \mu u^+ + \mu(u^+ - u^-)H(z) \quad (5.35)$$

其中微模量函数为 (5.14)。则同时满足式 (5.35)、(5.32) 和 (5.34) 的位移场同样可由傅里叶变换及其逆变换得到

$$u(z) = \frac{u^+ + u^-}{2} + \frac{\mu d}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikz}}{kL(k)} dk \quad (5.36)$$

其中

$$L(k) = M(k) + \mu - \rho c^2 k^2 = -\frac{\mu d^4}{r^2 b^2 (k^2 \ell^2 + 1)} \left(k^2 - \frac{r^2}{d^2} \right) \left(k^2 + \frac{b^2}{d^2} \right) \quad (5.37)$$

式中 $r > 0$ 和 $b > 0$ 为正实数

$$\begin{aligned} r &= \frac{d}{\ell \sqrt{2}} \frac{1}{v} \left[(1 - v^2 + \beta) + \sqrt{(1 - v^2 + \beta)^2 + 4\beta v^2} \right]^{1/2} \\ b &= \frac{d}{\ell \sqrt{2}} \frac{1}{v} \left[-(1 - v^2 + \beta) + \sqrt{(1 - v^2 + \beta)^2 + 4\beta v^2} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (5.38)$$

其中 v 为无量纲的 kink 传播的速度 (同样待定)

$$v := \frac{c}{c_0} \quad (5.39)$$

将式 (5.37) 代入式 (5.36) 得

$$u(z) = \frac{u^+ + u^-}{2} - \frac{r^2 b^2}{d^3} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + k^2 \ell^2}{k(k^2 - r^2/d^2)(k^2 + b^2/d^2)} e^{-ikz} dk \quad (5.40)$$

类似于上一小节中静态问题的研究, 式 (5.40) 中的积分同样可理解为 Cauchy 主值且由留数定理求得。与静态问题中积分的区别为, 此时的积分在实轴上有两个非零奇点 (同时有一对纯虚数的奇点)。在构造积分路径 Γ 时, 我们必须令其从两实数奇点的下半平面通过, 复平面 k 和积分路径如图 5.6 所示。积分路径必须从下半平面 (而不是上半平面) 通过奇点的原因是, 这些奇点导致了解中的振荡项 $\cos rz/d$ 和 $\sin rz/d$ 。由于假设 $z \rightarrow +\infty$ 时, 粒子处于平衡状态, 则这些振荡项不可能存在于 $z \rightarrow +\infty$; 另一方面在 $z \rightarrow -\infty$ 时允许粒子振动, 所以允许振荡项在 $z < 0$ 时存在。最后, 通过留数定理可得

$$u(z) = \begin{cases} u^+ + \frac{d}{2} \frac{1}{b^2 + r^2} \left(r^2 - \frac{\beta d^2}{v^2 \ell^2} \right) e^{-bz/d}, & z \geq 0 \\ u^- - \frac{d}{2} \frac{1}{b^2 + r^2} \left(r^2 - \frac{\beta d^2}{v^2 \ell^2} \right) e^{bz/d} - \frac{d}{b^2 + r^2} \left(b^2 + \frac{\beta d^2}{v^2 \ell^2} \right) \cos\left(\frac{rz}{d}\right), & z \leq 0 \end{cases} \quad (5.41)$$

由上式易知 u, u' 和 u''' 在 $z = 0$ 处连续, 而 u'' 满足式 (5.33) 所示的不连续跳跃。至此, 并未要求式 (5.41) 满足条件 $u(0) = u_*$ 。若令式 (5.41) 满足条件 $u(0) = u_*$, 可得 PD 模型的动力学关系, 下文将具体讨论。

上述解的另一种表示形式为

$$u(z) = \begin{cases} u^+ + (u_* - u^+) e^{-bz/d}, & z \geq 0 \\ u^- - (u_* - u^+) e^{bz/d} - (u^+ + u^- - 2u_*) \cos\left(\frac{rz}{d}\right), & z \leq 0 \end{cases} \quad (5.42)$$

利用式 (5.5) 和 (5.7) 可知, 若 $F = f_M$, 指数项的系数将会消失; 若 $F = f_0$, 余弦项的系数将会消失。式 (5.42) 中的位移场满足 $[[u]] = 0, [[u']] = 0, [[u''']] = 0$ 和 $u(0) = u_*$ 。注意到,

此时未要求式 (5.42) 满足式 (5.33)。若令式 (5.42) 满足式 (5.33)，也可得 PD 模型的动力学关系，下一小节将具体讨论。

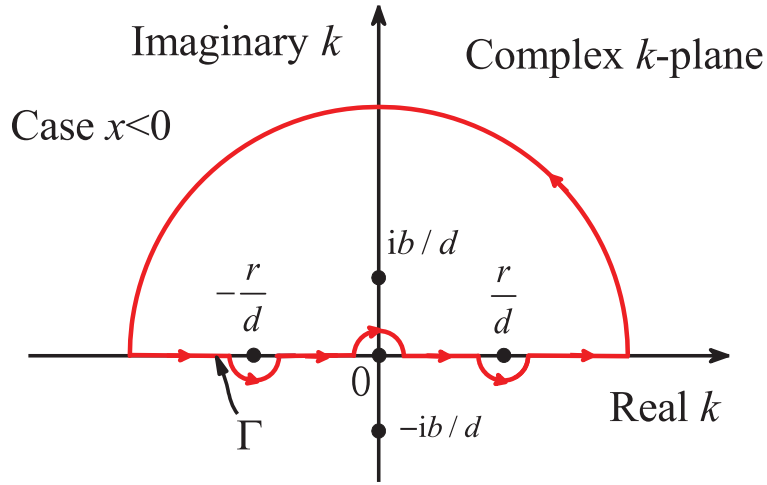


图 5.6 稳定传播的 kink: 复平面 k 中的奇点和积分路径

5.2.3.3 动力学关系

式 (5.41) 中的 $u(z)$ 在 $z = 0$ 时是连续的，但并未要求其满足 $u(0) = u^*$ （即式 (5.32)₂）。若满足该条件则可得外力 F 和 kink 传播速度 v 之间的关系，即 PD 模型的动力学关系：

$$F = f_0 + \frac{\mu d}{2(b^2 + r^2)} \left(b^2 + \frac{\beta d^2}{\ell^2 v^2} \right) \quad (5.43)$$

其中 r 和 b 为 v 的函数，同式 (5.38)。将式 (5.38) 代入式 (5.43) 可得

$$F = f_0 + \frac{\mu d}{4} \left(1 - \frac{1 - v^2 - \beta}{\sqrt{(1 - v^2 + \beta)^2 + 4\beta v^2}} \right) \quad (5.44)$$

给定力 F 的值，通过动力学关系 (5.44) 即可确定 kink 的传播速度 v ^①。注意到 $F > f_0$ ，因此 $(F - f_0)v \geq 0$ 。图 5.7 给出了不同 $\beta = \mu \ell^2 / E$ 下，亚音速范围内的动力学关系 (5.44)，而亚音速和超音速范围内的动力学关系（ β 取某一较小值）可参见图 5.3。

当粒子的间距 d 远远小于 PD 的特征长度 ℓ 时，可令式 (5.44) 中 $\beta \rightarrow \infty$ ，则有 $F \rightarrow f_M$ 。另一方面，当 PD 的特征长度 ℓ 远远小于粒子的间距 d 时，可令式 (5.44) 中 $\beta \rightarrow 0$ ，则当 $v < 1$ 时有 $F \rightarrow f_0$ ；当 $v > 1$ 时有 $F \rightarrow f_M$ ，如图 5.3 所示。此外，对于固定的 β ，当 $v \rightarrow \infty$ 时有 $F \rightarrow f_M$ 。

由图 5.7 可知，kink 的稳定传播要求外力须大于某一最小值，令式 (5.44) 中 $v = 0$

① 另一种确定动力学关系的方法是要求解 (5.42) 满足条件 (5.33)，可得到相同的动力学关系。

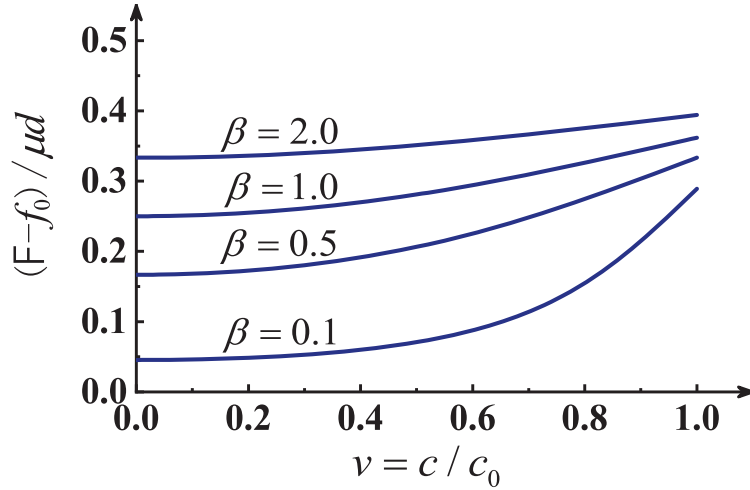


图 5.7 动力学关系: 不同 $\beta = \ell^2 \mu / E$ 下, 亚音速范围内的外力 $(F - f_0) / \mu d$ 和传播速度 $v = c / c_0$ 的关系。亚音速和超音速范围内的动力学关系可参见图 5.3

可求得该最小值 F_{\min} 为:

$$F_{\min} = f_0 + \frac{\mu d}{2} \frac{1}{1 + 1/\beta} \quad (5.45)$$

上式恰为式 (5.30) 所示范围的上限, 即保持 kink 平衡构形的外力最大值。说明稳定传播的动态封闭解与平衡构形的解自洽。且当外力 F 从零开始单调递增, 在 $F < F_{\min}$ 时, kink 将保持静态平衡, 直到力超过 F_{\min} 才开始传播。 $F_{\min} > f_0$ 表明, 即使外力超过 Maxwell 力 f_0 , 只要它仍小于 F_{\min} , kink 将会继续保持静态平衡, 这一现象被称作“点阵俘获 (lattice trapping)”。

5.2.3.4 $v \rightarrow 0$ 的动态解

回顾前文发现, 动态解 (5.41) 的位移场在 $z = 0$ 处是连续的, 而静态解 (5.28) 的位移场在 $z = 0$ 处不连续。为了理解这一差异, 我们进一步考察较小波速 v 时的动态解^①。

当波速 v 较小时, 式 (5.41) 中的动态解可近似表示为

$$u(z) \approx \begin{cases} u^+ + \frac{d}{2} \frac{1}{1 + \beta} e^{-bz/d}, & z > 0 \\ u^- - \frac{d}{2} \frac{1}{1 + \beta} e^{bz/d} - d \frac{\beta}{1 + \beta} \cos\left(\frac{rz}{d}\right), & z < 0 \end{cases} \quad (5.46)$$

其中, r 和 d 同式 (5.38), 可近似为

$$r \approx \frac{d}{\ell} \frac{\sqrt{1 + \beta}}{v}, \quad b \approx \frac{d}{\ell} \frac{1}{\sqrt{1 + 1/\beta}} \quad (5.47)$$

若不考虑式 (5.46)₂ 中的余弦项, 较小波速 v 下的动态解 (5.46) 和式 (5.47), 分别与静

^① 由式 (5.46)₂ 和 (5.47)₁ 可知, 对于任一固定的负值 z , $u(z)$ 在 $v \rightarrow 0$ 的极限通常意义上不存在, 必须通过进一步的措施来解释。

态解 (5.28) 和式 (5.27) 一致。对任一波速 $v > 0$ (无论 v 取多小的正值), 动态解 (5.46) 在点 $z = 0$ 处均连续。但当 $v \rightarrow 0$ 时, 余弦项的振荡频率趋于无穷, 而振幅 (即余弦项的系数) 恰好等于静态解 (5.24) 在 $x = 0$ 处的跳跃值 $[[u]]$ 。此外, 静态解 (5.28) 对满足式 (5.30) 的所有外力 F 均成立, 而较小波速下的动态解仅适用于 $F \approx F_{\min}$ 的情况。

5.2.4 PD 模型和其他连续介质模型的等价性

在前一节中, 我们构建了 kink 传播的 PD 模型, 并得到了其平衡构形 (5.28)、稳定传播时的动态封闭解 (5.41) 及动力学关系 (5.44)。我们惊奇地发现, PD 模型的上述解与文献^[158, 165]中的准连续模型具有相同的形式, 事实上, 当 $\ell = d/\sqrt{12}$ 时, 它们正好重合。一般来说, PD 理论的特征长度 ℓ 可依据不同的特性来选取 (如图 5.4 所示), 则准连续模型可看作是 PD 理论的特例, 此时 $\ell = d/\sqrt{12}$ 。这一发现促使我们提出以下更普遍的问题: 给定一个由微分方程描述的连续模型, 是否存在一个“等效”的 PD 模型? 本节针对这一问题进行详细地研究, 本节的讨论不局限于 kink 的传播, 适用于一般的无界域上的非线性动态问题。

在无界域上, 上述问题等效为, 将任一连续模型的微分方程转化为 PD 模型的积分型控制方程。而确定等效 PD 控制方程的关键是确定微模量函数的形式, 因此上述问题可进一步归结为, 求解等效 PD 模型的微模量函数。事实上, Whitham^[174]曾指出: 微分方程的色散关系多为有理函数, 为了得到形式多样的色散关系, 可采用积分算子, 且一旦给定期望的色散关系, 即可通过傅里叶逆变换得到相应的积分算子的核函数 (即微模量函数)。受此启发, 我们提出了如下确定 PD 微模量函数的策略: 首先, 对 PD 运动方程进行傅里叶变换, 可得声学函数 $M(k)$ 关于微模量 $C(x)$ 的显式关系式 (5.17), 求解关系式 (5.17) 的逆形式, 即将 $C(x)$ 表达成 $M(k)$ 的函数, 继而可由 $M(k)$ 计算出 $C(x)$; 其次, 对任一给定的连续模型的微分方程进行傅里叶变换, 可得该微分方程的声学函数 $M(k)$; 最后, 令第一步中 PD 模型的声学函数 $M(k)$ 等于第二步中微分方程的声学函数 $M(k)$, 即可由第一步求得的式 (5.17) 的逆形式计算出等效 PD 模型的微模量函数 $C(x)$ 。该策略具体实施如下。

首先将 PD 模型中的双势阱函数推广至更一般的非线性函数, 则此时 PD 的运动方程可表示为

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) [u(x+\xi, t) - u(x, t)] d\xi + b(u) = \rho u_{tt} \quad (5.48)$$

其中体力 $b(u)$ 如前一节所述可以等于 $F - w'(u)$, 也可以考虑更一般的情况如 $b(u, u_x)$ 。PD 理论一个吸引人的特点是它不涉及空间导数, 而包含 u_x 的体力将与 PD 的这一思想相违背, 因此, 本文中我们仅考虑体力形式为 $b = b(u)$ 的情况。本节中符号 $\mathcal{F}\{g\}$ 表

示函数 $g(x,t)$ 的傅里叶变换，其定义为

$$G(k,t) = \mathcal{F}\{g\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,t) e^{ikx} dx, \quad g(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\{G\} = \int_{-\infty}^{\infty} G(k,t) e^{-ikx} dk \quad (5.49)$$

对方程 (5.49) 进行傅里叶变换后可得

$$-M(k)\mathcal{F}\{u\} + \mathcal{F}\{b(u) - \rho u_{tt}\} = 0 \quad (5.50)$$

其中声学函数 $M(k)$ 为

$$M(k) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) [1 - e^{ik\xi}] d\xi \quad (5.51)$$

给定微模量函数 $C(x)$ ，即可由式 (5.51) 计算出声学函数 $M(k)$ 。我们的直接目标是将这个关系转化为由 $M(k)$ 计算 $C(x)$ 。注意到连续位移场 $u(x)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi) [u(x+\xi) - u(x)] d\xi = 0$$

因此在微模量函数 C 中添加一个 Dirac 函数 δ 并不改变 PD 的运动方程 (5.48)，同样，它也不会改变式 (5.51) 表示的声学函数 $M(k)$ 。因此我们只确定在一个 δ 函数误差范围内的微模量函数 C 。微模量函数 C 的求解可分以下两种情况。

第一种情况，若 $M(k)$ 在 $k \rightarrow \infty$ 时的极限 M_∞ 为有限值，则有

$$M_\infty := \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) d\xi \quad (5.52)$$

那么，式 (5.51) 可重写为

$$M(k) - M_\infty = - \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) e^{ik\xi} d\xi \quad (5.53)$$

上式表明 $-C(k)$ 是 $M(k) - M_\infty$ 的傅里叶变换。因此通过傅里叶逆变换 (5.49) 可得

$$C(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (M(k) - M_\infty) e^{-ikx} dk \quad (5.54)$$

上式给出了声学函数 M 对应的微模量函数 C ，该结果与 Dayal 文章^[10] 附录中的结果一致。

第二种情况，若 $k \rightarrow \infty$ 时， $M(k) \rightarrow \infty$ ，且

$$\frac{M(k)}{k^{2n}} \rightarrow m_\infty \quad (5.55)$$

其中 m_∞ 为有限值且整数 $n \geq 1$ 。此时式 (5.54) 失效。一般来说，此种情况下微模量函数将涉及一个广义函数及其导数^[174]。即便如此，我们仍可得到一个关于 C 的正式描述：定义函数 $\mathcal{C}(x)$ 为

$$\mathcal{C}(x) := -\frac{(-1)^n}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{M(k)}{k^{2n}} - m_\infty \right) e^{-ikx} dk - (-1)^n m_\infty \delta(x) \quad (5.56)$$

由傅里叶变换的性质可得，满足式 (5.51) 的微模量函数可表示为

$$C(x) = \mathcal{C}^{(2n)}(x) \quad (5.57)$$

其中 $\mathcal{C}^{(2n)}$ 为 \mathcal{C} 的第 $2n$ 阶导数。当 $n=0$ 时，式 (5.57) 与式 (5.54) 相差一个 δ 函数，由于前文曾提到 δ 函数对控制方程不产生影响，因此在一个 δ 函数误差范围内，可认为当 $n=0$ 时，式 (5.57) 与式 (5.54) 一致。

给定一个连续模型的微分方程，如果它的傅里叶变换形式与 PD 的形式 (5.50) 一致，我们就说该微分模型与某一 PD 模型等价，并在相关积分存在的情况下，可通过式 (5.54) 或式 (5.57) 计算出该等效 PD 模型的微模量函数 C 。

例如，由晶格运动方程 (5.2) 演化而来的连续模型的显式微分方程可统一表示为

$$\mathcal{L}_1 u_{xx} + \mathcal{L}_2 [b(u) - \rho u_{tt}] = 0 \quad (5.58)$$

其中微分算子 \mathcal{L}_1 和 \mathcal{L}_2 分别为

$$\mathcal{L}_1 = \sum_{n=1}^{m_1} a_{2n-2} \frac{\partial^{2n-2}}{\partial x^{2n-2}}, \quad \mathcal{L}_2 = \sum_{n=1}^{m_2} b_{2n-2} \frac{\partial^{2n-2}}{\partial x^{2n-2}} \quad (5.59)$$

其中 a_i 和 b_i 为常数，整数 $m_1, m_2 \geq 1$ 。对任一函数 g 有

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\partial^n g}{\partial x^n} \right\} = (-ik)^n \mathcal{F} \{g\}$$

对式 (5.58) 和 (5.59) 进行傅里叶变换，得

$$q(k) \mathcal{F} \{u\} + p(k) \mathcal{F} \{b(u) - \rho u_{tt}\} = 0 \quad (5.60)$$

其中多项式 $q(k)$ 和 $p(k)$ 分别为

$$q(k) = \sum_{n=1}^{m_1} a_{2n-2} (-1)^n k^{2n}, \quad p(k) = \sum_{n=1}^{m_2} b_{2n-2} (-1)^{n-1} k^{2n-2} \quad (5.61)$$

令微分方程的傅里叶变换形式 (5.60) 与 PD 运动方程的傅里叶变换形式 (5.50) 一致，则有

$$M(k) = -\frac{q(k)}{p(k)} \quad (5.62)$$

上式中，若 $q(k)$ 和 $p(k)$ 为同阶多项式，即惯性项和非惯性项具有相同阶数的空间微分项，则在 $k \rightarrow +\infty$ 时 $M(k)$ 为有限值，则可由式 (5.54) 求得与微分方程 (5.58) 等价的 PD 模型的微模量函数 $C(x)$ ；若多项式 $q(k)$ 的阶数高于 $p(k)$ ，即非惯性项中的空间微分阶数较高，如经典线弹方程、应变梯度方程等均属于此类情况，此时相应的微模量函数由式 (5.56) 和 (5.57) 求得，其中将含有 Dirac 函数导数等一类的广义函数。

我们现在以两个微分型的连续介质模型（Boussinesq 模型和准连续模型）为例，来具体阐释等效 PD 模型的微模量函数的求解过程。

两连续介质模型（Boussinesq 模型和准连续模型）可由离散模型通过泰勒展开得

到，具体操作如下。将离散模型 (5.2) 的体力一般化为 $b(u)$ ，并只考虑最近邻相互作用，可得到位移场 $u(x,t)$ 的控制方程：

$$E \frac{u(x+d,t) - 2u(x,t) + u(x-d,t)}{d^2} + b(u) = \rho u_{tt}(x,t) \quad (5.63)$$

其中 $E = \kappa_1$ ， $b(u) = F - w'(u)$ 。假设在每个时刻 t ，位移场 $u(x \pm d, t)$ 均可由泰勒级数表示为

$$u(x \pm d, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm d)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} u(x, t) \quad (5.64)$$

利用式 (5.64) 可将式 (5.63) 改写为^①：

$$E \mathcal{L} u_{xx} + b(u) = \rho u_{tt} \quad (5.65)$$

其中 \mathcal{L} 代表算子

$$\mathcal{L} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{d^{2n-2}}{(2n)!} \frac{\partial^{2n-2}}{\partial x^{2n-2}} = 1 + \frac{d^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \dots \quad (5.66)$$

如果只保留算子 \mathcal{L} 级数的第一项，方程 (5.65) 简化为

$$E u_{xx} + b(u) = \rho u_{tt}$$

该方程与第 5.2.2 节的经典弹性模型的运动方程一致，若保留算子 \mathcal{L} 级数的两项可以得到弹性应变梯度理论的控制方程：

$$\frac{E d^2}{12} u_{xxxx} + E u_{xx} + b(u) = \rho u_{tt} \quad (5.67)$$

上式即为 Boussinesq 模型。上式中含有 u_{xxxx} ，这意味着方程 (5.67) 在处理初边值问题时，较之于经典线弹性方程需要额外的高阶边界条件。为了避免这种情况，Rosenau^[166] 将式 (5.65) 改写为

$$E u_{xx} + \mathcal{L}^{-1} [b(u) - \rho u_{tt}] = 0 \quad (5.68)$$

其中

$$\mathcal{L}^{-1} = \sum_{n=1}^m c_{2n-2} \frac{\partial^{2n-2}}{\partial x^{2n-2}} = 1 - \frac{d^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{d^4}{240} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \dots \quad (5.69)$$

若只保留算子 \mathcal{L}^{-1} 的前两项，方程 (5.68) 可简化为

$$\frac{\rho d^2}{12} u_{xxtt} + E u_{xx} - \rho u_{tt} + b(u) - \frac{d^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [b(u)] = 0 \quad (5.70)$$

上式即为准连续模型。注意到方程 (5.70) 中位移 u 关于 x 的导数最高为二阶，因此不需要额外的边界条件，其中 u_{xxtt} 可以和动能中的 $\frac{1}{2} u_{xt}^2$ 联系起来， u_{xxtt} 在应变梯度理论^[9]

① 对于每个粒子与 N 个粒子存在相互作用的离散模型，Seleson 等^[86] 已经证明该离散模型的控制方程泰勒展开后得到的高阶微分方程，与 PD 方程泰勒展开后得到的高阶微分方程一致。

或 Mindlin 理论^[83]中常被称作“micro-inertia”。

例 1: 准连续模型: 该模型由方程 (5.70) 描述, 可看作是一般表达式 (5.58) 和式 (5.59) 的特殊情况, 其中 $m_1 = 1$ 、 $m_2 = 2$ 、 $a_0 = E$ 、 $b_0 = 1$ 、 $b_2 = -d^2/12$ 。则由式 (5.61)、(5.62) 和 (5.52) 可得多项式 $q(k)$ 和 $p(k)$, 以及声学函数 $M(k)$ 为

$$q(k) = -Ek^2, \quad p(k) = 1 + \frac{d^2}{12}k^2, \quad M(k) = -\frac{q(k)}{p(k)} = \frac{Ek^2}{1 + d^2k^2/12}, \quad M_\infty = \frac{12E}{d^2}$$

由式 (5.54) 可得等效 PD 模型的微模量函数为

$$C(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{Ek^2}{1 + k^2d^2/12} - \frac{12E}{d^2} \right) e^{-ikx} dk$$

上式积分后可得 (在一个 δ 函数误差范围内)

$$C(x) = \frac{12\sqrt{3}E}{d^3} e^{-\sqrt{12}|x|/d} \quad (5.71)$$

上式即为与准连续介质模型等价的 PD 模型的微模量函数。值得注意的是这个微模量函数正是我们在第 5.2.3 节所采用的形式 (5.14), 同时也是 Silling^[14] 在分析非局部效应时自然得到的函数形式。比较式 (5.71) 和式 (5.14) 可知前者是后者在 $\ell = d/\sqrt{12}$ 时的特殊情况。

例 2: 应变梯度模型 (Boussinesq): 该模型由方程 (5.67) 描述, 可看作是一般表达 (5.58)、(5.59) 的特殊情况, 其中 $m_1 = 2$ 、 $m_2 = 1$ 、 $a_0 = E$ 、 $a_2 = Ed^2/12$ 、 $b_0 = 1$ 。由式 (5.61) 可知多项式 $p(k)$ 和 $q(k)$ 为

$$q(k) = -Ek^2 + \frac{Ed^2}{12}k^4, \quad p(k) = 1$$

此时 $M(k) = -q(k)/p(k)$, 且当 $k \rightarrow \infty$ 时, $M(k)/k^4 \rightarrow m_\infty$ 。因此我们须利用式 (5.56) 和 (5.57) 计算等效 PD 模型的微模量函数, 其中 $n = 2$, $m_\infty = -Ed^2/12$ 。由 (5.56) 可得

$$\mathcal{C}(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E}{k^2} e^{-ikx} dk + \frac{Ed^2}{12} \delta(x) = E|x| + \frac{Ed^2}{12} \delta(x)$$

则由 (5.57) 可得

$$C(x) = \mathcal{C}''''(x) = E\delta''(x) + \frac{Ed^2}{12}\delta''''(x)$$

其中符号 ' 表示关于 x 的导数, 该微模量函数实际上是 Whitham^[174] 书中第 11 章的特殊形式。

5.3 一维人工透射边界条件

本节的主要任务是构建 PD 的人工透射边界条件, 在此过程中, 将用到匹配色散关系的思想, 为此, 本节首先研究了 PD 模型的色散关系; 其次建立了 PD 的人工透射边界条件、弱非线性问题的人工透射边界条件及双向边界条件, 并给出了相应的验证

算例；最后通过实际应用算例说明了 PD 人工透射边界条件的有效性。

5.3.1 色散关系

根据式 (4.7)，一维线性化态型 PD 和键型 PD 具有相同的形式，任一物质点 \hat{x} 在 \hat{t} 的运动方程为

$$\rho \ddot{u}(\hat{x}-\hat{t}) = \int_{\mathcal{H}_{\hat{x}}} C(\hat{x}', \hat{x}) [u(\hat{x}', \hat{t}) - u(\hat{x}, \hat{t})] d\hat{x}' + b(\hat{x}, \hat{t}) \quad (5.72)$$

其中， $\mathcal{H}_{\hat{x}}$ 表示物质点 \hat{x} 附近以 \hat{x} 为中心， ℓ 为半径的邻域，且 $\hat{x}' \in \mathcal{H}_{\hat{x}}$ 。微模量函数 $C(\hat{x}', \hat{x})$ 同式 (2.6)，表征了材料的本构信息，例如由常数型的权函数可得

$$C(\hat{x}' - \hat{x}) = \begin{cases} \frac{3E}{\ell^3}, & |\hat{x}' - \hat{x}| \leq \hat{\ell} \\ 0, & |\hat{x}' - \hat{x}| > \hat{\ell} \end{cases} \quad (5.73)$$

忽略体力，并引入无量纲化参数

$$x := \frac{\hat{x}}{\ell_0}, \ell := \frac{\hat{\ell}}{\ell_0}, t := \frac{c_L \hat{t}}{\ell_0}, \text{ 其中 } c_L := \sqrt{\frac{E}{\rho}}, u(x, t) := \frac{\hat{u}(\hat{x}, \hat{t})}{U} \quad (5.74)$$

其中， U 为位移 \hat{u} 的幅值； c_L 为一维线弹材料纵波波速； ℓ_0 为根据具体实际问题选定的一个特征长度，例如可选为 $\ell_0 = \sqrt{A}$ ，其中 A 为杆的截面积。方程 (5.72) 的离散形式可表示为

$$\ddot{u}_j = \sum_p \tilde{C}(x_{j+p} - x_j) (u_{j+p} - u_j) \Delta x \quad (5.75)$$

其中，采用了单点高斯积分和均匀网格数值计算方法； x_j 和 x_{j+p} 分别是离散点的位置坐标， x_{j+p} 为点 x_j 邻域内的离散点， $p = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$ ； $m = \ell/\Delta x$ 表示网格离散密度；求和符号表示关于 p 的所有取值求和。无量纲 $\tilde{C}(x_{j+p} - x_j)$ 可简记为 \tilde{C}_p

$$\tilde{C}_p := \tilde{C}(x_{j+p} - x_j) = \frac{C(\hat{x}_{j+p} - \hat{x}_j) \ell^3}{E} \quad (5.76)$$

以左行简谐波为例

$$u_j = e^{i(\omega t + j\xi \Delta x)} \quad (5.77)$$

其中， ω 为角频率； ξ 为波数； $i = \sqrt{-1}$ ，将式 (5.77) 代入式 (5.75) 可得离散色散关系

$$\omega = \sqrt{\sum_p \frac{2\ell \tilde{C}_p}{m} \sin^2\left(\frac{\ell p \xi}{2m}\right)} \quad (5.78)$$

例如，对微模量 (5.76)，离散色散关系可具体写为

$$\omega = \sqrt{\sum_p \frac{6}{m\ell^2} \sin^2\left(\frac{\ell p \xi}{2m}\right)} \quad (5.79)$$

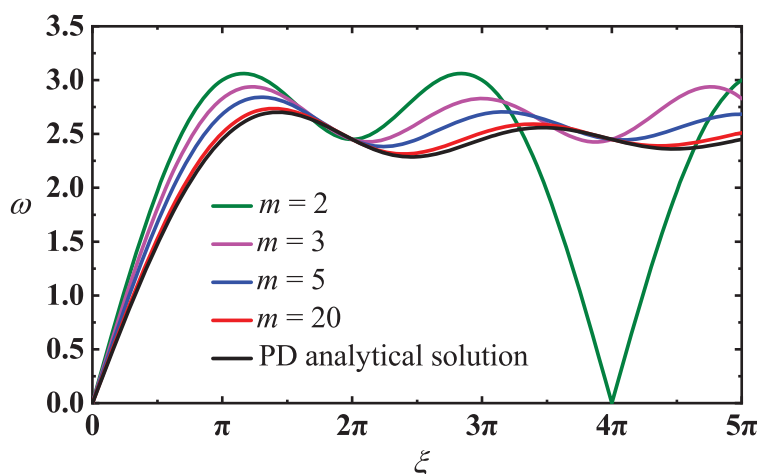


图 5.8 一维近场动力学色散关系

微模量 (5.76) 相应的连续色散关系的解析解为^[105]

$$\omega = \sqrt{\frac{6}{\ell^2} \left(1 - \frac{\sin \ell \xi}{\ell \xi} \right)} \quad (5.80)$$

在设计透射边界条件之前，有必要对离散框架的收敛性进行分析，该分析可通过对比离散色散关系和连续色散关系实现，具体收敛性分析如下。

首先考察 m -收敛性^[71]：当 ℓ 固定且 $m \rightarrow \infty$ ，PD 的数值计算结果收敛于 PD 的解析解。取 $m = 2, 3, 5, 20$ ，离散色散关系 (5.79) 如图 5.8 所示，其中离散色散关系的周期是由空间离散造成的，为 $2m\pi$ ，随着 m 的增加 PD 的离散色散关系收敛于解析解。这个现象也可从数学上证明如下：

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{\sum_p \frac{6}{m\ell^2} \sin^2 \left(\frac{\ell p \xi}{2m} \right)} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{6}{\ell^2} \left(1 - \frac{1}{m} \cdot \frac{\sin \left(\frac{2m+1}{2} \cdot \frac{\ell \xi}{m} \right) - \sin \left(\frac{\ell \xi}{2m} \right)}{2 \sin \left(\frac{\ell \xi}{2m} \right)} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{6}{\ell^2} \left(1 - \frac{\sin \ell \xi}{\ell \xi} \right)} \end{aligned} \quad (5.81)$$

其次考察 ℓ -收敛性^[71]：当 $\ell \rightarrow 0$ ， m 固定或其增长的速度小于 ℓ 减小的速度，PD 的数值计算结果收敛于经典的解析解。当式 (5.79) 中的 $\ell \rightarrow 0$ 时，可得

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} \sqrt{\sum_p \frac{6}{m\ell^2} \sin^2 \left(\frac{\ell p \xi}{2m} \right)} = \lim_{\ell \rightarrow 0} \sqrt{\sum_p \frac{6}{m\ell^2} \left(\frac{\ell p \xi}{2m} \right)^2} = \sqrt{\frac{(m+1)(2m+1)}{2m^2}} \xi \quad (5.82)$$

上式表明若 (5.82) 中 $m \rightarrow \infty$ ，则离散色散关系 (5.79) 收敛于经典色散关系 $\omega = \xi$ 。

最后考察 (ℓm) -收敛性^[71]：当 $\ell \rightarrow 0$ 且 m 增长的速度比 ℓ 减小的速度快，PD 的数

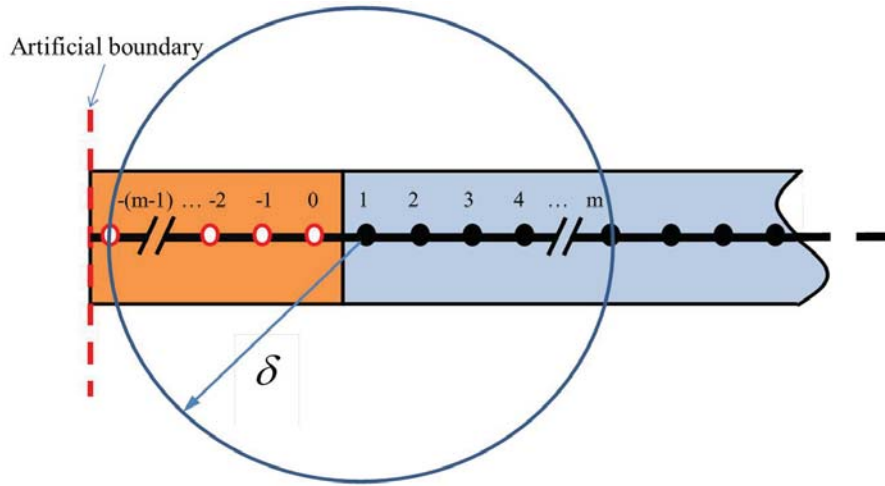


图 5.9 人工边界示意图：边界点 $(x_0, \dots, x_{-(m-1)})$ 和内部点 (x_1, \dots, x_m)

值结果收敛于 PD 的解析解且一致收敛于经典解。对离散色散关系 (5.79)，有

$$\lim_{\ell \rightarrow 0, m \rightarrow \infty} \sqrt{\sum_p \frac{6}{m\ell^2} \sin^2 \left(\frac{\ell p \xi}{2m} \right)} = \lim_{\ell \rightarrow 0} \sqrt{\frac{6}{\ell^2} \left(1 - \frac{\sin \ell \xi}{\ell \xi} \right)} = \xi \quad (5.83)$$

即证明了离散色散关系满足 (ℓm) -收敛性。

上述收敛性分析表明，本节的数值离散框架满足 PD 的三种收敛性要求，为下文发展 PD 的人工边界条件打下了基础。

5.3.2 透射边界条件

如图 5.9 所示，利用 PD 模拟无限大问题，其数值计算域的左侧因被截断而产生人工截断边界。由于 PD 的非局部性，截断后一些物质点（如图 5.9 中的红色空心点，记为 $x_0, \dots, x_{-(m-1)}$ ）的非局部邻域不完整，从而导致出射波在通过这些点时发散不希望反射，这些点被称为“边界点”。相应地，距离人工截断边界位置大于非局部特征长度 ℓ 的物质点（记为 x_1, \dots, x_m ）具有完整的非局部邻域，被称为“内部点”。一维 PD 数值计算模型中的边界点个数为 m ，即等于网格离散密度。人工透射边界条件的主要目的就是减小或消除由于人为截断所带来的非物理事实的反射。由于 PD 理论的非局部性，其人工边界条件相对经典理论而言较为复杂，相关研究较为匮乏。本小节基于王贤明和唐少强^[170]提出的匹配边界条件，构建 PD 的人工透射边界条件，以实现在人工边界处无反射的设想。

透射边界条件的构造主要基于波传播的思想，例如对于均匀介质中的左行波（图 5.9 中的出射波），内部点的运动满足单向波动方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0 \quad (5.84)$$

如果边界点同样满足上式，则可实现出射波完全无反射地通过，此时的边界点可看作

是“虚拟内部点”。匹配边界条件 (MBC) [170] 可看作是单向波动方程的离散形式, 例如边界点 x_0 的匹配边界条件为

$$c_0 \dot{u}_0 + \sum_{j=1}^N c_j \dot{u}_j - \left(b_0 u_0 + \sum_{j=1}^N b_j u_j \right) = 0 \quad (5.85)$$

其中, c_0 、 c_j 、 b_0 和 b_j 为待定系数, N 为匹配过程中用到的内部点的个数。在一维匹配边界条件 [170] 的研究中, 只有一个边界点, 而 PD 中却需要处理一组边界点, 即 $x_0, \dots, x_{-(m-1)}$ 。为此, 我们提出了动态设计的思想。首先利用匹配边界条件 (5.85) 使边界点 x_0 满足单向波的运动规律。一旦如此, x_0 与内部点的运动规律一致, 可将其看作是虚拟内部点并当作内部点使用。接下来就可以进行 x_{-1} 的边界条件设计, 以此类推至所有边界点。令其均满足单向波的运动规律, 进而完成 PD 人工边界条件的设计, 并将其称为 PD 透射边界条件, 简记为 PTBCs。

接下来给出 PTBCs 表达式 (5.85) 中参数 c_0 、 c_j 、 b_0 、和 b_j 的具体确定方法。将式 (5.77) 代入式 (5.85) 得如下条件:

$$\Delta(\xi) := i\omega(\xi) \sum_{j=0}^N c_j e^{ij\xi\Delta x} - \sum_{j=0}^N b_j e^{ij\xi\Delta x} = 0 \quad (5.86)$$

其中 $\Delta(\xi)$ 为色散匹配残差函数 [170]。由于 PD 色散关系 (5.78) 的非线性, 所有的波数 ξ 不可能同时满足条件 (5.86)。选取一些特殊的波数, 令其满足条件 (5.86), 即可得到一组关于 c_j 和 b_j 的线性方程组, 解该方程组即可求得 c_j 和 b_j 。而波数的选取可根据具体情况而定, 现考虑如下两个情形: 当出射波以低频为主时, 波数选取为长波极限 $\xi \rightarrow 0^+$; 若主要频率中同时包含某一或某些高频波, 则可额外选取该高频波波数。本文中低频 (或高频) 波依据波长而定, 当波长远大于 (或远小于) 离散间距时定义为低频波 (高频波)。两种情形下 PTBCs 的具体求解过程如下。

5.3.2.1 低频波的 PTBCs (PTBCN)

在 PD 和大多数离散系统中, 低频波比高频波传播速度要快, 会率先到达截断边界产生不希望的反射, 因此我们优先考虑此类情况下边界条件的设计。首先确定 x_0 点的 PTBCs 的系数 c_0 、 c_j 、 b_0 和 b_j 。按照文献 [170], 色散匹配残差函数需要满足条件:

$$\Delta(\xi) = o(\xi^M) \quad (5.87)$$

其中, 整数 M 依据精度要求而定。将色散匹配残差函数 $\Delta(\xi)$ 关于 ξ 进行泰勒展开, 式 (5.87) 可等价于

$$\left. \frac{d^n \Delta(\xi)}{d\xi^n} \right|_{\xi=0} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, M \quad (5.88)$$

令 $M = 2N$ 可得到 $2N + 1$ 个方程来求解 $2N + 1$ 个未知系数（其中已令 $c_0 = 1$ ）。将此类边界条件记为 PTBCN。 N 的大小取决于精度的要求，对于 $\xi < 1$ 的长波， N 越大，边界反射波的幅值越小。关于 PTBCN 的精度将在下一个小节讨论。若令 $N = 1$ ，将非局部色散关系 (5.78) 代入式 (5.88)，得

$$c_0 = c_1 = 1, b_0 = -b_1 = -2\sqrt{\frac{\ell}{m} \sum_{p=1}^m p^2 \tilde{C}_p} \quad (5.89)$$

特别地，当 $\Delta x = m = 1, \tilde{C}_p = 1$ ，可得 $b_0 = -b_1 = -2$ ，即为文献^[170]中的匹配边界条件。

一旦 x_0 的运动规律设计完成，就可以把其当作虚拟内部点。按照同样的思路相继地完成下一个点 x_{-1} 及其它点的设计。最后所有点的透射边界条件 PTBCN 可统一表示为

$$c_q \dot{u}_q + \sum_{j=q+1}^{N+q} c_j \dot{u}_j - \left(b_q u_q + \sum_{j=q+1}^{N+q} b_j u_j \right) = 0, \quad q = 0, -1, \dots, -(m-1) \quad (5.90)$$

例如，一维线性 PD 的 PTBC1 为

$$\dot{u}_q = -2\sqrt{\frac{\ell}{m} \sum_{p=1}^m p^2 \tilde{C}_p} (u_q - u_{q+1}) - \dot{u}_{q+1}, \quad q = 0, -1, \dots, -(m-1) \quad (5.91)$$

另外，表 5.1 给出了 PTBC1、PTBC2 和 PTBC3 的各系数^①。

表 5.1 PTBCN 的系数

	c_0	c_1	c_2	c_3	b_0	b_1	b_2	b_3
PTBC1	1	1			$-2a_1$	$2a_1$		
PTBC2	1	A_1	1		$-A_2$	0	A_2	
PTBC3	1	A_3	A_3	1	$-A_4$	$-A_5$	A_5	A_4

5.3.2.2 高频波的 PTBCs (PTBCN(0, ξ_2, \dots, ξ_N))

在处理长波极限情况时，有时需要同时考虑高频波的影响。为此可令色散匹配残差函数在长波极限处满足式 (5.88)，主要的高频波 ξ_k 满足 $\Delta(\xi_k) = 0$ ，高频波 $\Delta(\xi_k) = 0$

① 表 5.1 中的各参数： $A_1 = \frac{4(a_1+3a_3)}{a_1-6a_3}$ ， $A_2 = \frac{3a_1^2}{a_1-6a_3}$ ， $A_3 = 9 + \frac{120(a_3+10a_5)}{a_1-120a_5}$ ， $A_4 = 2a_1 + \frac{5(a_1+12a_3)}{3(a_1-120a_5)}$ ， $A_5 = -6a_1 + \frac{15a_1^2+120a_1a_3-720a_3^2}{a_1-120a_5}$ ， $a_1 = \sqrt{\frac{\ell}{m} \sum_{p=1}^m p^2 \tilde{C}_p}$ ， $a_3 = -\frac{\ell}{4!m a_1} \sum_{p=1}^m p^4 \tilde{C}_p$ ， $a_5 = \frac{\ell}{6!m a_1} \sum_{p=1}^m p^6 \tilde{C}_p - \frac{a_3^2}{2a_1}$ 。

的实部和虚部对应的两个线性方程为

$$\begin{cases} \omega(\xi_k) \sum_{j=0}^N c_j \sin(j\xi_k \Delta x) + \sum_{j=0}^N b_j \cos(j\xi_k \Delta x) = 0 \\ \omega(\xi_k) \sum_{j=0}^N c_j \cos(j\xi_k \Delta x) - \sum_{j=0}^N b_j \sin(j\xi_k \Delta x) = 0 \end{cases} \quad (5.92)$$

若 $p > 1$ 则在考虑长波极限的同时至少可以处理 $(2N + 1 - 3)/2 = N - 1$ 个波数，将此类边界条件记为 PTBCN(0, ξ_2, \dots, ξ_N)。例如，令 $N = 2$ 且 $\xi_N = \xi_2 = \pi$ ，PTBC2(0, π) 系数可由以下线性方程组求得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_0 & a_0 & -1 & -1 & -1 \\ a_1 & a_1 + a_0 & a_1 + 2a_0 & 0 & -1 & -2 \\ a_2 & a_2 + a_1 + a_0/2 & a_2 + 2a_1 + 2a_0 & 0 & -1/2 & -2 \\ 0 & \omega(\pi) \sin(\pi \Delta x) & \omega(\pi) \sin(2\pi \Delta x) & 1 & \cos(\pi \Delta x) & \cos(2\pi \Delta x) \\ \omega(\pi) & \omega(\pi) \cos(\pi \Delta x) & \omega(\pi) \cos(2\pi \Delta x) & 0 & -\sin(\pi \Delta x) & -\sin(2\pi \Delta x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.93)$$

其中， $a_1 = \sqrt{\frac{\ell}{m} \sum_{p=1}^m p^2 \tilde{C}_p}$ ， $a_0 = a_2 = 0$ ， $\omega(\pi)$ 由式 (5.78) 得到。方程 (5.93) 的解为

$$c_0 = c_2 = 1, \quad c_1 = \frac{2a_1}{\omega(\pi) - a_1}, \quad b_0 = -b_2 = -\frac{a_1 \omega(\pi)}{\omega(\pi) - a_1}, \quad b_1 = 0 \quad (5.94)$$

该系数同样适用于其它的边界条件，将上式中的系数代入式 (5.90) 可得 PTBC2(0, π)

$$\dot{u}_q = -\frac{a_1 \omega(\pi)}{\omega(\pi) - a_1} (u_q - u_{q+2}) - \frac{2a_1}{\omega(\pi) - a_1} \dot{u}_{q+1} - \dot{u}_{q+2}, \quad q = 0, -1, \dots, -(m-1) \quad (5.95)$$

若 N 取其它值，按照上述过程，同样可求得 PTBCN(0, ξ_2, \dots, ξ_N) 的系数。

至此，完成了 PTCBs 在两种情形下的具体求解过程。需要特别指出的是：第一，PTBCs 适用于不同形式的微模量函数，不局限于线性材料，甚至适用于下文要讨论的弱非线性问题；第二，PD 理论适用于纳米尺度到宏观尺度的各类力学问题，因此 PTBCs 同样可以用于处理不同尺度的问题，与针对晶格的匹配边界条件相比，有更广泛的应用范围。

5.3.3 PTCBs 的有效性

本小节从反射系数和数值算例两个方面检验 PTCBs 的有效性。

5.3.3.1 反射系数

左行出射简谐波的稳态反射波具有以下形式：

$$u_j(t) = e^{i(\omega(\xi)t + j\xi \Delta x)} + \underline{\alpha}(\xi) e^{i(\omega(\xi)t - j\xi \Delta x)} \quad (5.96)$$

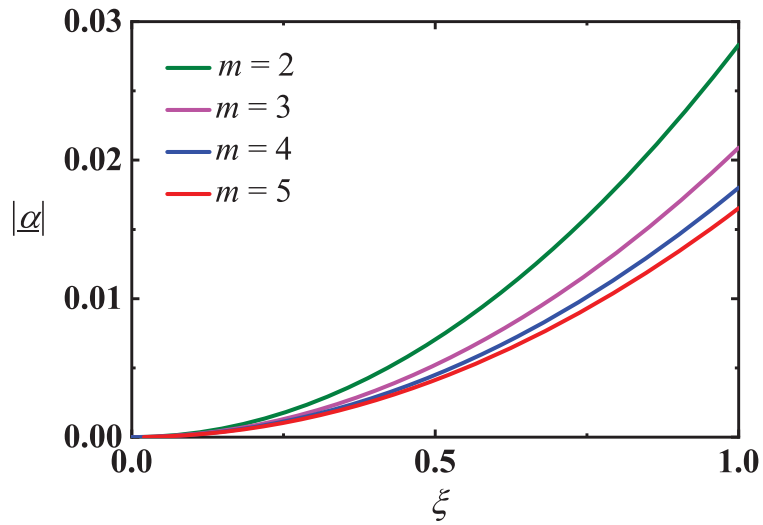
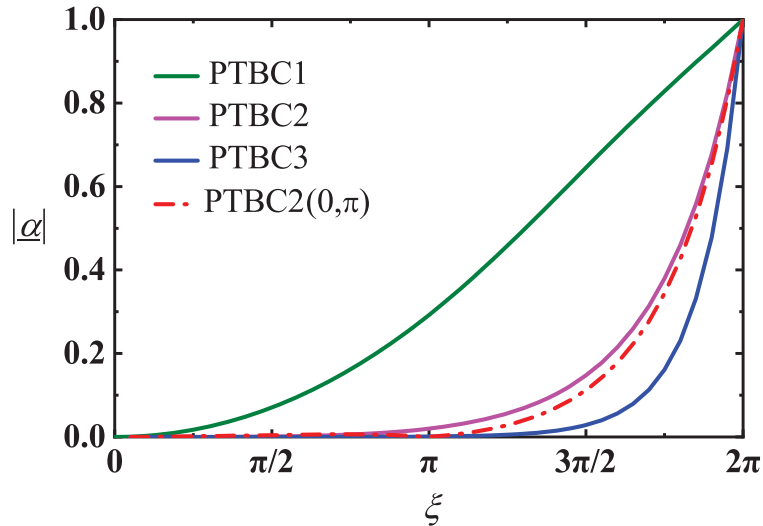


图 5.10 PTBC1 的反射系数


 图 5.11 不同边界的反射系数 (式 (5.79) 其中 $m = 2$ 、 $\ell = 1$)

其中 $\alpha(\xi)$ 为位移振幅的反射系数。将上式代入边界条件 (5.90)，可得

$$\alpha(\xi) = -\frac{\Delta(\xi)}{\Delta(-\xi)} \quad (5.97)$$

由色散关系 (5.79), 两种 PTBCs (5.90) 和 (5.95) 的反射系数可由式 (5.97) 得到。

首先, 以 PTBC1 (5.91) 为例, 令 $\ell = 1$, 离散密度 m 取不同值时的反射系数如图 5.10 所示。随着 m 的增大, 同一波数 ξ 的反射系数逐渐减小。其次, 令式 (5.79) 中的 $m = 2$ 和 $\ell = 1$, 不同的边界条件 PTBCN 和 PTBC2(0, π) 的结果如图 5.11 所示。从 PTBC1 到 PTBC3, 反射系数在整个周期内均随着 N 的增大而减小。尤其是 PTBC2 的反射系数与 PTBC1 相比明显降低。PTBC2 和 PTBC3 的反射系数在整个周期内均很小, PTBC2(0, π) 在高频短拥有更小的反射系数。总之 PTBCs 的透射效果会随着 N 的增大或匹配波数个数的增多而明显的提升。

5.3.3.2 数值算例

本小节通过数值算例来验证 PTBCs 的有效性，同时解决 Weckner 等^[55,56] 在模拟一维无限长杆波动时 PD 数值解与解析解不匹配的问题。为此选用与 Weckner 等^[55,56] 相同的材料参数和加载条件，其中初始条件为

$$u(x,0) = e^{-x^2}, \quad \dot{u}(x,0) = 0 \quad (5.98)$$

微模量函数为

$$C(\hat{x}' - \hat{x}) = \frac{4E}{\hat{\ell}^3 \sqrt{\pi}} e^{-[(\hat{x}' - \hat{x})/\hat{\ell}]^2} \quad (5.99)$$

由上一章的格林函数法，很容易求得该初值问题的解析解为

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \cos(kx) e^{-k^2/4} \cos\left(t \sqrt{\frac{1 - e^{-k^2 \ell^2/4}}{\ell^2/4}}\right) dk \quad (5.100)$$

当 $\ell \rightarrow 0$ 时，PD 解析解 (5.100) 退化为著名的 D'Alembert 解

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} u(x,t) = \frac{1}{2} \left(e^{-(x-t)^2} + e^{-(x+t)^2} \right) \quad (5.101)$$

在数值计算中，选取一个无量纲长度为 20 的计算区域来模拟一维无限长杆，即 $x \in [-10, 10]$ 。在计算区域的左右两端分别施加 PTBCs，并将该计算区域离散为 300 个子域，且 $\ell = 0.25$ ，模量函数为 (5.99)。对内部点的时间积分采用速度 Verlet 格式

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = u_j^n + \dot{u}_j^n \Delta t + \ddot{u}_j^n \frac{(\Delta t)^2}{2} \\ \dot{u}_j^{n+1} = \dot{u}_j^n + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{u}_j^n + \ddot{u}_j^{n+1}) \end{cases} \quad (5.102)$$

其中， n 表示第 n 次迭代，时间步长 $\Delta t = 0.001$ ；边界点位移的更新如下

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{2} (\dot{u}_j^n + \dot{u}_j^{n+1}) \quad (5.103)$$

(1) 数值结果

数值计算结果如图 5.12 所示，其中，‘Exact’ 是在同样数值框架下选取更大的计算区域，保证没有边界反射情况下得到的数值结果，并将其看作是数值框架下无限大域的数值精确解。由图可知：首先，高斯波包分解成两个波包，分别沿相反的方向传播（图 5.12(a)），直到波前到达边界后逐渐消失（图 5.12(b)），并产生反射（图 5.12(c)），然后反射反向向另一端传播，如此重复。PTBC1 和 PTBC2 在图 5.12(a) 和图 5.12(b) 中与精确解符合较好，施加 PTBC1 和 PTBC2 后的截断区域仍存在反射，在图 5.12(c) 中二者与精确解之间存在明显的差别，此时 PTBC1 和 PTBC2 中位移振幅的反射系数分别为 0.55% 和 0.04%。可见 PTBC2 较之于 PTBC1 透射效果有明显提升，两者均很好地实现了波的透射。另外，为了进一步分析数值结果的准确性，我们比较了左端边界点 x_0 处的 PTBC1 数值解、PD 解析解 (5.100) 和经典的 D'Alembert 解 (5.101)。除以下

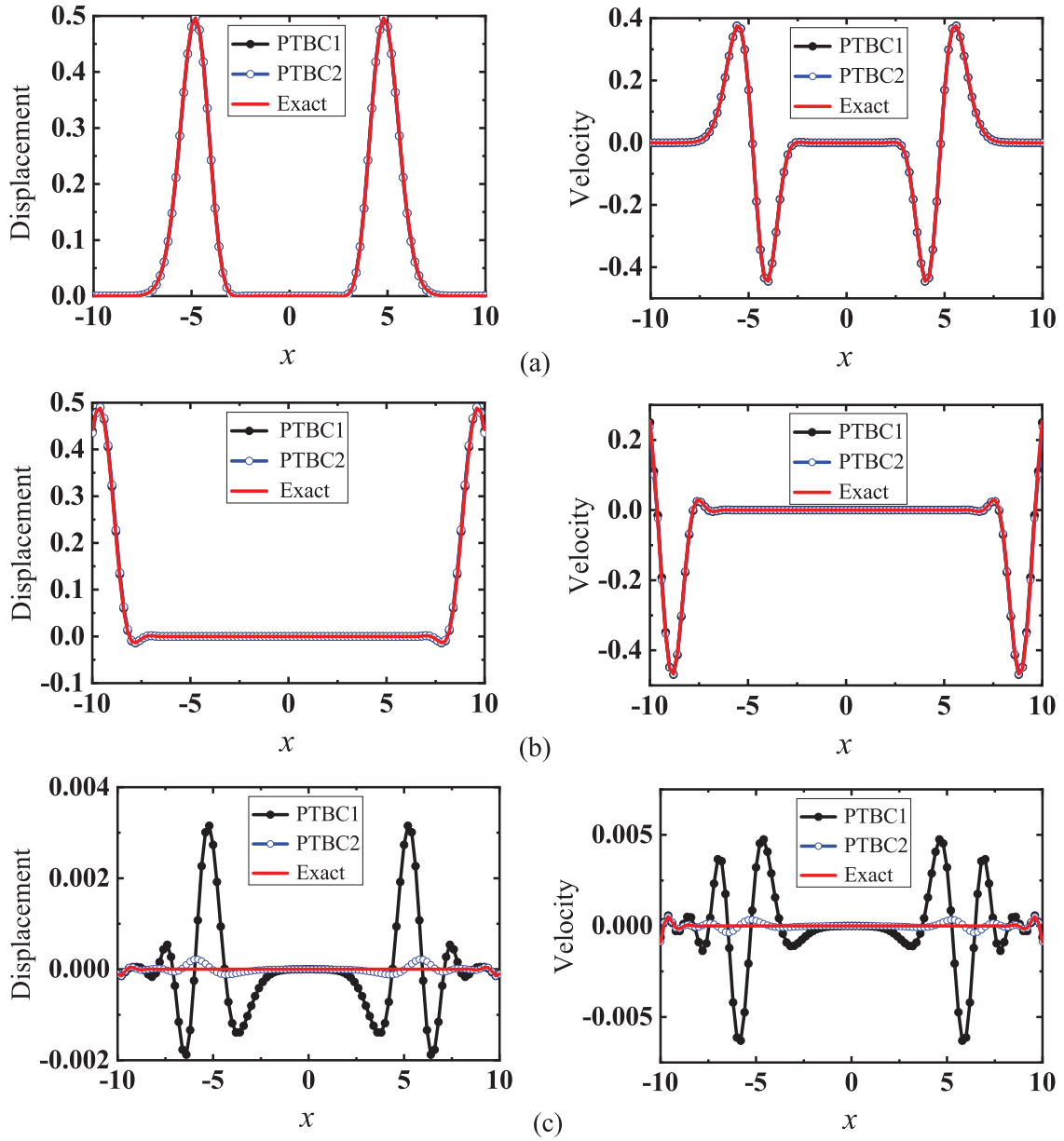
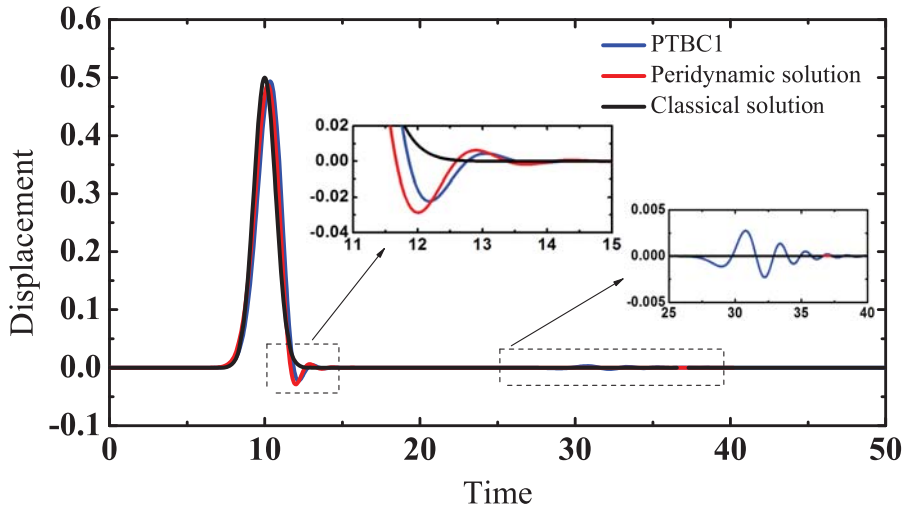


图 5.12 PTBC1 和 PTBC2 下不同时刻的数值解，左列子图为位移，右列子图为速度：(a) $t = 5$ ；
(b) $t = 10$ ；(c) $t = 15$


 图 5.13 边界点 x_0 的位移记录

两点细微的差别，三者几乎一致：第一，只有 PTBC1 在 $t = 30$ 附近存在反射，与原波包的峰值相比，该反射很小，该反射对数值的影响基本可以忽略；第二，由于非局部性的影响，PTBC1 数值解和 PD 解析解在 $t = 12$ 均存在波动，Weckner 和 Abeyaratne 指出 PD 的位移结果可看作是欠阻尼振子，而经典解呈指数衰减至零，可看作是过阻尼振子。

(2) 数值收敛性

为了分析 PTBCs 在不同微模量函数下的有效性，现考虑以下三种微模量函数：高斯型 (5.99)、常数型 (5.73) 和三角型（线性）

$$C(\hat{x}' - \hat{x}) = \begin{cases} \frac{6E}{\hat{\ell}^3} \left(\frac{\hat{\ell}}{|\hat{x}' - \hat{x}|} - 1 \right) & |\hat{x}' - \hat{x}| \leq \hat{\ell} \\ 0 & |\hat{x}' - \hat{x}| > \hat{\ell} \end{cases} \quad (5.104)$$

其中，只有微模量函数 (5.73) 在非局部长 ℓ 处不连续，另外，高斯型微模量函数 (5.99) 的非局部邻域为无穷大，为了数值实现，选取截断半径 $r = 3\ell$ 进行截断。此时图 5.9 中的半径应为 r ，边界点的个数为 $r/\Delta x = 3m$ 。

选取反射系数、点 x_0 的位移峰值及该峰值到达的时间以上三个物理量进行数值收敛性分析，并定义数值解和精确解之间的相对误差为

$$\frac{|A_{ex} - A_{num}|}{A_{ex}} \quad (5.105)$$

其中， A 代表后两个物理量中的任一个，不同微模量函数下的 ℓ 收敛性和 (ℓm) 收敛性分析如下。

ℓ 收敛性分析：当 $m = 7$ ， $\ell = 1/2, 1/4, 1/8, 1/16$ 时，三种微模量下的计算结果如图 5.14。随着 ℓ 减小并趋于零，三个物理量的计算结果均趋于零，说明收敛于经典解。其中高斯型微模量函数 (5.99) 的反射系数及相对误差最大，但其最大反射系数仍小于

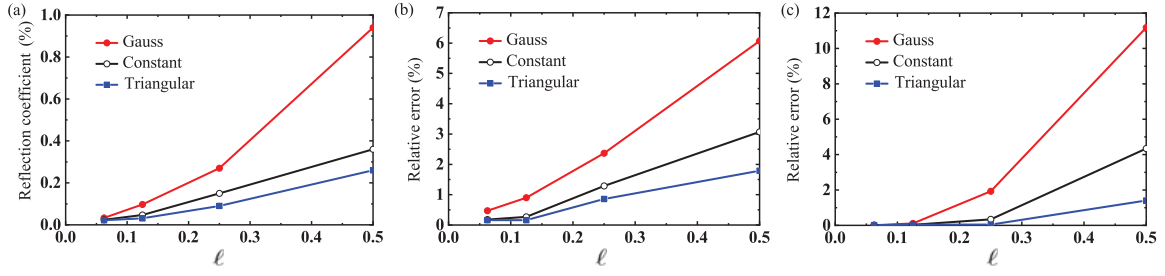


图 5.14 ℓ 收敛性分析（‘Gauss’为微模量函数 (5.99)；‘Constant’为微模量函数 (5.73)；‘Triangular’为微模量函数 (5.104)）：(a) 反射系数；(b) 峰值到达边界时间的相对误差；(c) 峰值幅值的相对误差

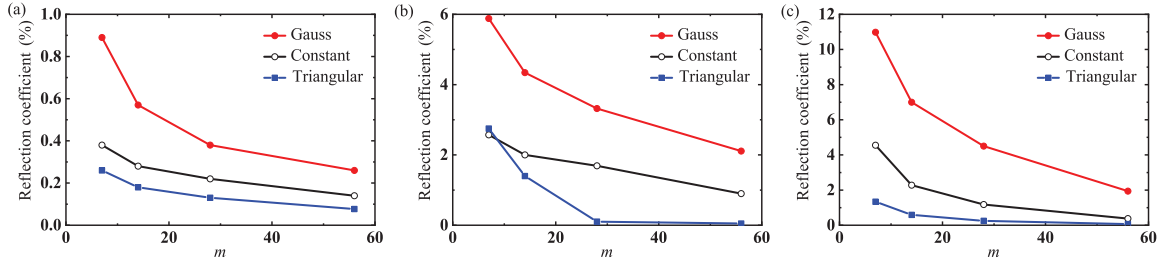


图 5.15 (ℓm) 收敛性分析（‘Gauss’为微模量函数 (5.99)；‘Constant’为微模量函数 (5.73)；‘Triangular’为微模量函数 (5.104)）：(a) 反射系数；(b) 峰值到达边界时间的相对误差；(c) 峰值幅值的相对误差

1%。说明 PTBCs 在三种微模量函数下均具有较好的透射效果，反射对数值结果的影响均可忽略。

(ℓm) -收敛性分析：当 $m = 7, 14, 28, 56$ ，相应地 $\ell = 1/2, 2/5, 1/3, 1/4$ 时，结果如图 5.15。随着 m 的减小，所有结果均收敛于经典解。所有的反射系数均小于 1%，其中三角型微模量函数的 (5.104) 反射系数及相对误差最小。

5.3.4 一维非线性 PD 的透射边界条件

本节将线性 PTBCs 的思想推广至弱的非线性问题中，提出一维非线性 PD 的透射边界条件，并通过数值算例验证该边界条件的有效性。

5.3.4.1 理论框架

不考虑体力的影响，采用式 (5.74) 中的无量纲化参数，离散后的一维非线性 PD 的控制方程为

$$\ddot{u}_j = f_j = \sum_p f(u_{j+p} - u_j, x_{j+p} - x_j) \Delta x \quad (5.106)$$

此时响应函数 f 不再是关于位移的线性函数，为了构建非线性问题的 PTBCs，我们首先引入局部线性化的概念^[170]。在匹配边界条件中，只有一个边界点 x_0 ，其控制方程可

局部线性化为

$$\ddot{u}_0 = H_Q^2 \sum_p \tilde{C}(x_p - x_0) (u_p - u_0) \Delta x \quad (5.107)$$

式中，局部线性化系数 H_Q 为

$$H_Q = \sqrt{f_Q / \sum_p \tilde{C}(x_{Q+p} - x_Q) (u_{Q+p} - u_Q) \Delta x} \quad (5.108)$$

其中 $Q = 1$ 。事实上， Q 可以理解为与边界点 x_0 存在相互作用的内部点的编号。在 PD 中，需要处理多个边界点（如图 5.9 所示），每个边界点与不止一个内部点存在相互作用。那么 Q 该如何选取呢？注意到所有的边界点都在内部点 x_1 的非局部邻域内（如图 5.9 所示），即均与内部点 x_1 存在相互作用。因此，我们选取 $Q = 1$ 对所有边界点进行局部线性化处理，同时保证了每个边界点的 H_Q 均一致，进而上文构建的线性问题的 PTBCs 可直接应用到非线性问题中，例如，对左侧边界点 x_0 ，局部线性化后的 PTBC1 可表示为

$$c_0 \dot{u}_0 + \sum_{j=1}^N c_j \dot{u}_j - H_Q \left(b_0 u_0 + \sum_{j=1}^N b_j u_j \right) = 0 \quad (5.109)$$

其中，系数 c_j 和 b_j 与线性 PTBCs 一致，其它边界条件的构建类似式 (5.109)，因此可得非线性问题中左侧边界点的 PTBC1 为

$$\dot{u}_q = -2H_Q \sqrt{\frac{\ell}{m} \sum_{p=1}^m p^2 \tilde{C}_p (u_q - u_{q+1})} - \dot{u}_{q+1}, \quad q = 0, -1, \dots, -(m-1) \quad (5.110)$$

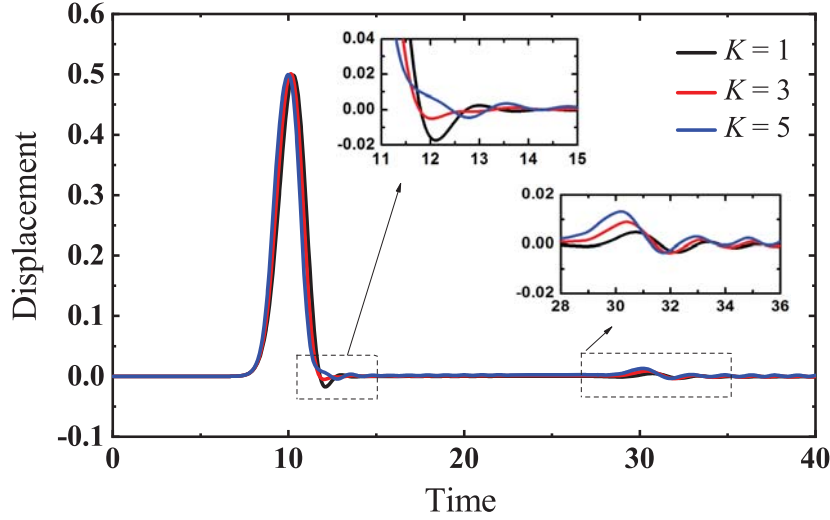
需要说明的是，上述过程中采用了局部线性化假设及线性问题的色散关系，因此本节提出的非线性 PTBCs 仅适用于非线性比较弱的情况，对于强非线性问题会存在较大的误差。

5.3.4.2 数值算例

以最常用的 Fermi-Pasta-Ulam (FPU) 非线性势场为例，FPU- β 势可表示为

$$f_j = \sum_p \hat{C}_p \left[(u_{j+p} - u_j) + K (u_{j+p} - u_j)^3 \right] \quad (5.111)$$

这里， K 为非线性项系数，微模量函数 \tilde{C}_p 为高斯型 (5.99)，其中 $\ell = 0.25$ 。下面研究初始高斯位移 (5.98) 产生的非线性动态响应，并通过左侧边界点 x_0 的位移来检验非线性 PTBCs (5.110) 的有效性。分别取 $K = 1, 2, 3$ ，结果如图 5.16 所示。三条曲线 $K = 1, 3, 5$ 在 $t = 30$ 均存在反射，反射系数分别为 0.94%，1.78% 和 2.62%，均呈欠阻尼衰减至零。由结果可知，非线性 PTBCs 在非非线性问题中具有较好的透射效果。


 图 5.16 一维非线性 PD 计算得到的边界点 x_0 的位移场

5.3.5 PD 的双向界面条件

以上提出的 PTBCs 可确保出射波无反射的透过边界，但在一些情况下，需要外界扰动也能较为准确的输入到计算区域内。这在多尺度框架中较为常见。它要求粗细尺度之间可进行准确的信息交换，即能够同时确保出射波无反射地通过，并使入射波准确的进入计算区域。同时满足以上两点要求的边界条件称为双向界面条件。本节将在 PTBCs 基础上，发展 PD 双向界面条件，并给出数值算例验证其有效性。

5.3.5.1 理论框架

以计算域左侧边界为例，当同时考虑入射波和出射波时，位移和速度场可分别分解为两部分：

$$u_j = u_j^{\text{In}} + u_j^{\text{Out}}, \quad \dot{u}_j = \dot{u}_j^{\text{In}} + \dot{u}_j^{\text{Out}} \quad (5.112)$$

其中，上标 In 和 Out 分别表示入射波和出射波。入射波的信息从边界点 $x_{-(m-1)}$ 传播到边界点 x_0 ，进而施加到计算区域中。出射波可由 PTBCs 处理为

$$c_q \dot{u}_q^{\text{Out}} = - \sum_{j=q+1}^{N+q} c_j \dot{u}_j^{\text{Out}} + \left(b_q u_q^{\text{Out}} + \sum_{j=q+1}^{N+q} b_j u_j^{\text{Out}} \right) \quad (5.113)$$

其中， $q = 0, -1, \dots, -(m-1)$ 。将式 (5.112) 代入式 (5.113) 得

$$c_q \dot{u}_q = - \sum_{j=q+1}^{N+q} c_j \dot{u}_j + \left(b_q u_q + \sum_{j=q+1}^{N+q} b_j u_j \right) + F_q^{\text{In}} \quad (5.114)$$

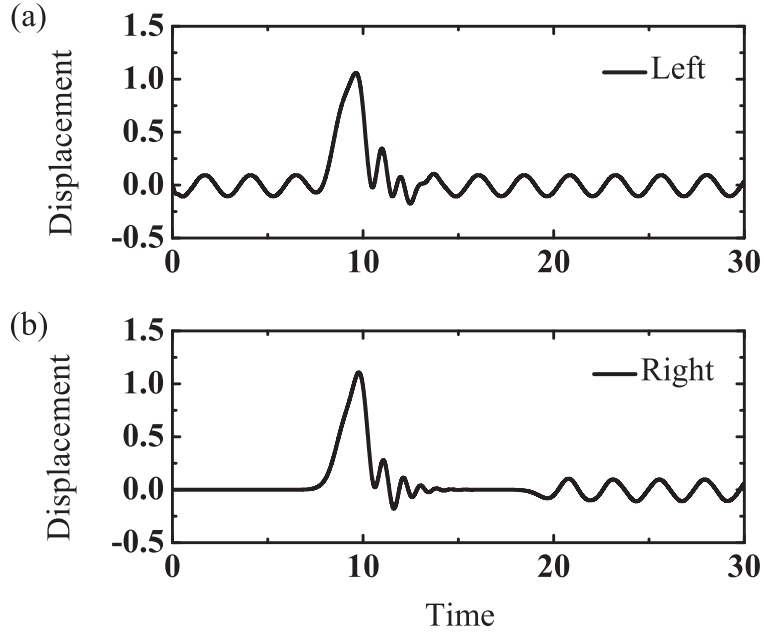


图 5.17 两端的位移记录：(a) 左端；(b) 右端

其中

$$F_q^{\text{In}} = c_q \dot{u}_q^{\text{In}} + \sum_{j=q+1}^{N+q} c_j \dot{u}_j^{\text{In}} - \left(b_q u_q^{\text{In}} + \sum_{j=q+1}^{N+q} b_j u_j^{\text{In}} \right) \quad (5.115)$$

因此边界点的运动应满足式 (5.114)，该式即为 PD 的双向边界条件。式 (5.114) 中系数 c_q 、 c_j 、 b_q 和 b_j 同式 (5.90) 一致，因此 PD 的双向边界条件可以直接由 PTBCs 求出。另外在处理出射波问题时，也可通过在边界点施加阻尼系数的方式实现出射波无反射的效果，该类型的边界条件被称为吸收边界条件。吸收边界条件很难用于双向边界条件的设计。

5.3.5.2 数值算例

考虑一维有限计算域 $x \in [-10, 10]$ ，在左侧施加双向边界条件，右侧施加 PTBC2，初始高斯位移作为出射波

$$u(x) = 2e^{-(x/10)^2} \left[1 + 0.3 \cos \left(\frac{\pi x}{6} \right) \right], \quad \dot{u}(x) = 0 \quad (5.116)$$

入射波为

$$u(x, t) = 0.1 \cos(\omega t + \xi x) \quad (5.117)$$

其中，波数 ξ 和角频率 ω 满足常数型微模量函数 (5.73) 的色散关系，其中 $\ell = 0.4$ ， $m = 2$ ， $\xi = 2\pi/25$ ， $\omega = 2.73$ 。左右两端的位移记录（如图 5.17），具有以下两个特点：一方面，高斯波包分为左行波和右行波，在 $t = 7$ 时分别到达左右两端，然后几乎无反射地通过两端边界；另一方面，入射的单色波成功地从左侧边界传入，且幅值为 0.1，

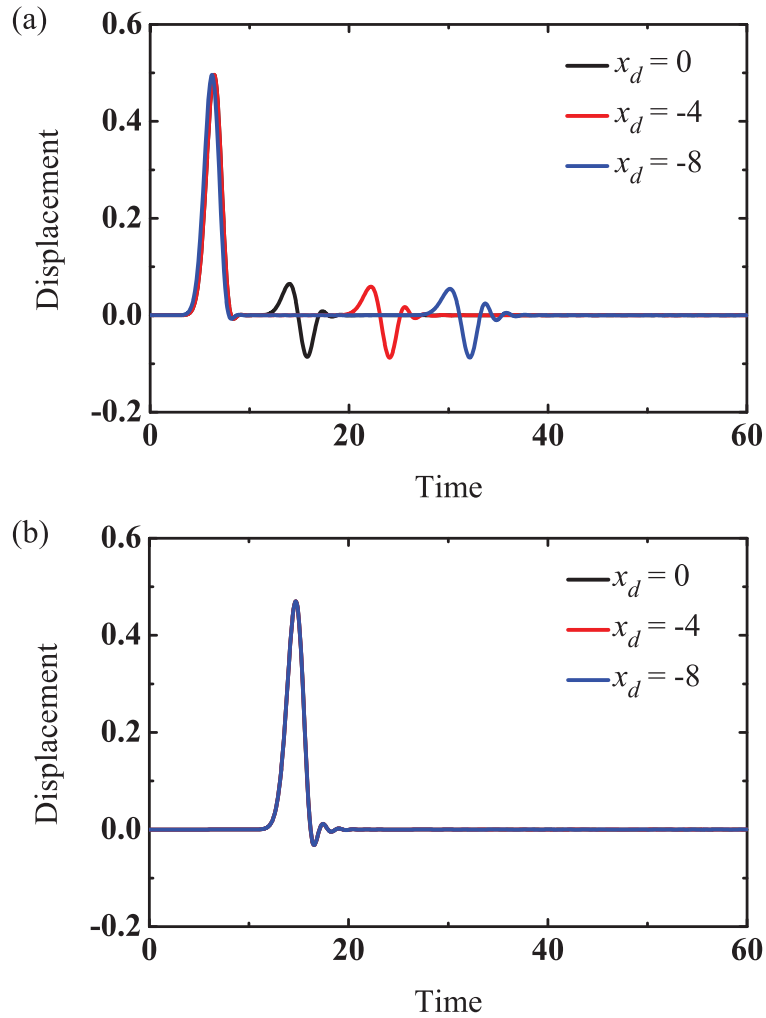


图 5.18 不同缺陷位置 x_d 的位移：(a) 右端；(b) 左端

周期为 2.31 近似等于 $2\pi/\omega$ ，说明单色波信息准确无误地注入到了计算区域。

5.3.6 应用

PTBCs 的系数在时间和空间上仅依赖于局部点的材料信息，与计算区域内部的信息无关，属于时间和空间上均局部的边界条件^[170]。该类边界条件较易于内部信息较为复杂的动态问题中。本节以缺陷损伤、复合材料界面和震源模拟为例，旨在说明 PTBCs 在实际问题中的应用前景。

5.3.6.1 缺陷损伤

假设计算域 $x \in [-10, 10]$ 内有一缺陷，在 PD 的数值计算中该缺陷描述为大小为 0.2 的子域的损伤。穿过或与该子域有关的 PD 键的刚度将发生衰减，衰减系数为 μ_0 。此时 PD 的微模量函数可表述为

$$C_d = \varphi(\hat{x}', \hat{x}) C(\hat{x}' - \hat{x}) \quad (5.118)$$

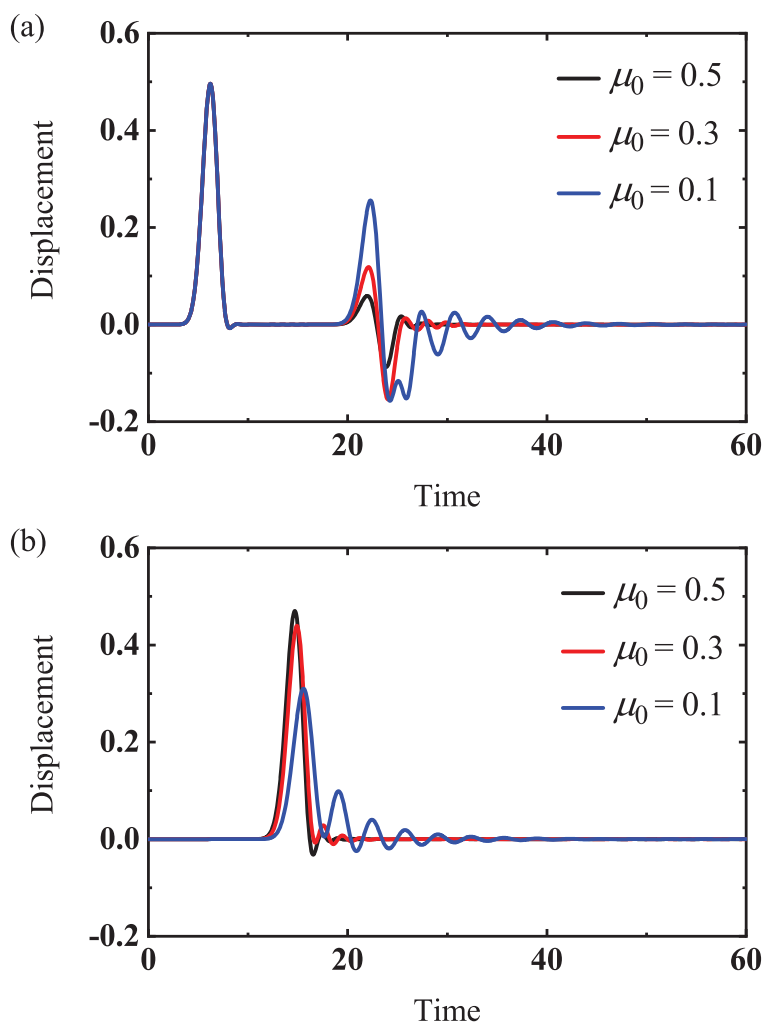


图 5.19 不同损伤程度 μ_0 下的位移: (a) 右端 (除了一个峰值外, 所有的峰值均来自缺陷反射); (b) 左端 (所有的峰值均来自出射波)

其中 $C(\hat{x}' - \hat{x})$ 为高斯型微模量函数 (5.99) 且 $\ell = 0.25$, $\varphi(\hat{x}', \hat{x})$ 为损伤函数

$$\varphi(\hat{x}', \hat{x}) = \begin{cases} \mu_0 & |\hat{x}_d - \hat{x}| \leq |\hat{x}' - \hat{x}| \\ 1 & \text{其它} \end{cases} \quad (5.119)$$

其中 x_d 为损伤子域的中心。引入无量纲化参数 (5.74), 初始条件为

$$u(x) = e^{-(x-4)^2}, \quad \dot{u}(x) = 0 \quad (5.120)$$

在计算区域两端施加 PTBC2。接下来选取不同的 x_d 和 μ_0 以检验 PTBC2 的有效性。

首先, 令 $\mu_0 = 0.5$, x_d 取不同值时, 左右两端的位移分别如图 5.18 (a) 和 (b) 所示。可以看到两波包几乎无反射的穿过了两端边界, 初始波在缺陷损伤处同时发生透射和反射。图 5.18(b) 中仅仅存在透射波, 说明人工透射边界处的反射波很小, 几乎不可见。其次, 令 $x_d = -4$, 不同损伤系数 μ 情况下的位移如图 5.19 所示。缺陷反射波和缺陷透射波的幅值与 μ 相关, 缺陷反射波的最大幅值随着 μ 的减小而增大 (图 5.19 (a)), 而

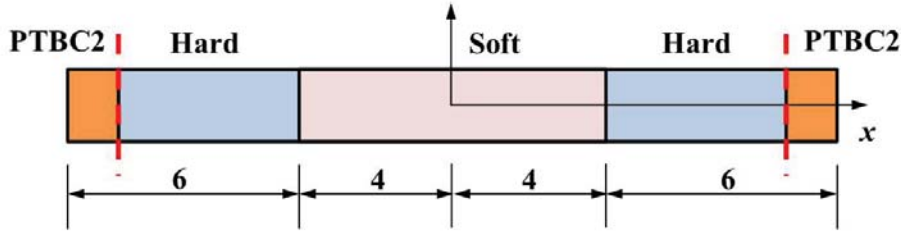


图 5.20 具有材料界面的无限大复合材料杆的计算域示意图

缺陷透射波的最大幅值随着 μ 的减小而减小 (图 5.19 (a))。随着 μ 的减小, 即损伤程度变大, 缺陷反射波和缺陷透射波的振荡更加剧烈。由此可知, 反射波和透射波携带了缺陷位置及损伤程度等信息。通过位移的记录可反演出缺陷的情况, 可用于无损检测。

5.3.6.2 复合材料界面

接下来模拟波在由两种材料组成的无限大复合材料杆中的传播。截断计算域为 $[-10, 10]$, 如图 5.20 所示。两材料的杨氏模量满足 $E' = \beta_c E$, 其中 E' 是中间材料的杨氏模量, 该部分材料的长度为 8; E 是两端材料的杨氏模量。假设两材料具有相等的密度 ρ , 且 $\beta_c < 1$, 即中间材料比两端材料弹性模量小, 分别记作 S_{soft} 和 S_{hard} , 且两材料具有相同的非局部特征长度 $\hat{\ell}$, 则该复合材料杆的微模量函数可表示为

$$C_{\text{com}} = \begin{cases} C(\hat{x}' - \hat{x}) & \hat{x}' \in S_{\text{hard}} \text{ 且 } \hat{x} \in S_{\text{hard}} \\ \beta_c C(\hat{x}' - \hat{x}) & \text{其它} \end{cases} \quad (5.121)$$

其中 $C(\hat{x}' - \hat{x})$ 为硬材料的微模量函数, 选取为式 (5.99) 且 $\ell = 0.25$ 。在图 5.20 所示的复合材料杆的左右两端施加 PTBC2 边界条件。为了能准确地模拟波在复合材料界面处的反射和透射, 根据界面处的平衡条件可得^[175], S_{soft} 和 S_{hard} 计算域中各自的网格尺寸须满足 $\Delta x_{\text{soft}}/\Delta x_{\text{hard}} = \sqrt{\beta_c}$ 。在初始位移条件 (5.98) 下, 不同 β 取值时的位移场响应如图 5.21。由于初始条件和计算结构的对称性, 位移场关于图 5.20 中的坐标原点对称。因此图 5.20 中仅记录了原点和右端处的位移, 分别如图 5.21 (a) 和 (b) 所示。由图可知:

首先, 当 $\beta_c = 1$, 该算例退化为 5.3.3.2 节中的均匀杆算例, 则初始 Gauss 波包分解为两个波包, 分别向两端运动并几乎无反射地穿过边界, 如图 5.21(b) 所示。

其次, 如果 $\beta_c < 1$, 则两波包将首先在复合材料界面处发生反射和透射。当 β_c 减小时, 反射波和透射波的幅值均会增长。数值结果的准确性可通过分析反射波和透射波的幅值来验证。两幅值应该满足传播定律。根据传播定律, 透射波的幅值应为 $2U_{\text{In}}/(1 + \sqrt{\beta_c})$, 其中 U_{In} 是入射波的幅值。本例中入射波的幅值为 0.5。如果 $\beta_c = 0.5$, 则透射波的幅值应该为 0.586, 此时的数值解为 0.589 (见图 5.21)。因此数值解与理论

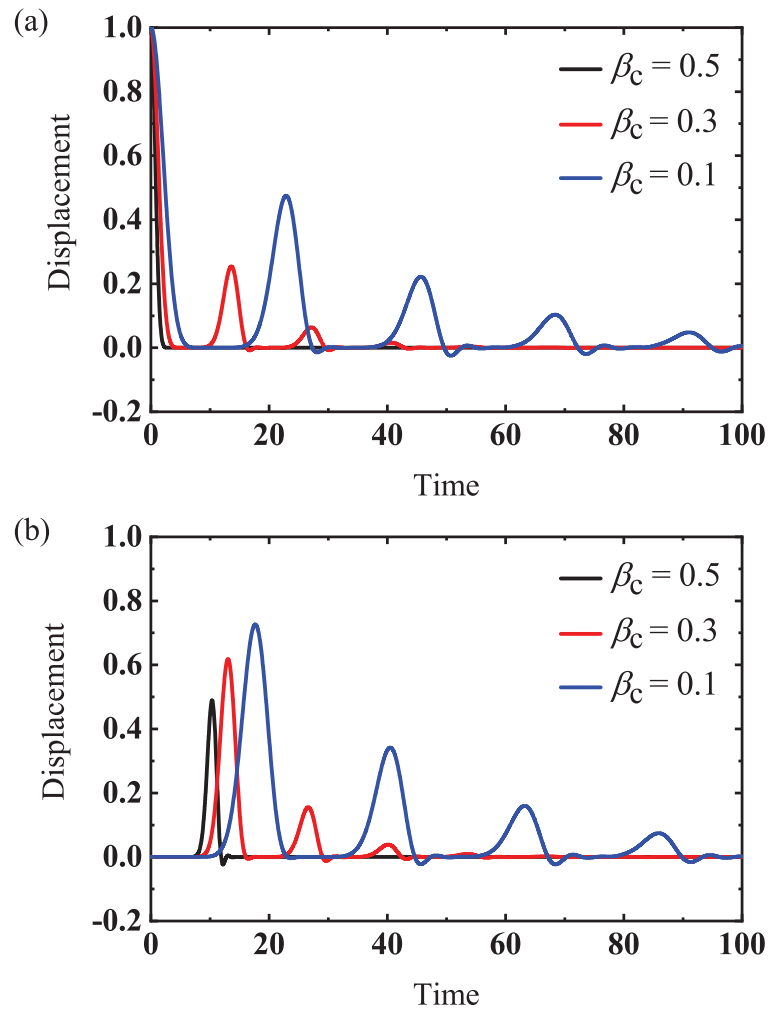


图 5.21 β_c 取不同值时不同位置处的位移变化历史: (a) 原点处的位移 (除 $t=0$ 外, 所有的波峰均来自于复合材料界面的反射); (b) 左端处的位移 (所有的波峰均来自于复合材料界面的透射)

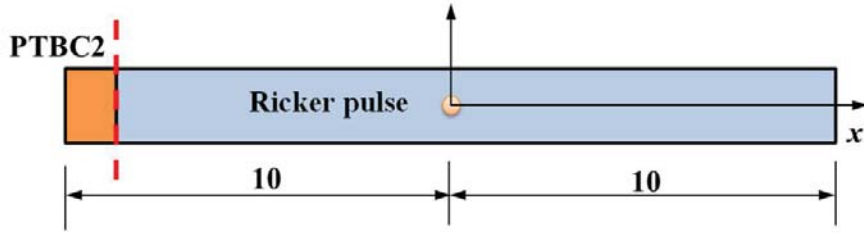


图 5.22 震源 Ricker 脉冲下的一维半无限大问题的数值计算模型

分析一致，从而验证了数值模拟的准确性。

最后，复合材料界面的透射波继续通过左右两端，记录为图 5.21 (b) 中每条曲线的第一个波包；与此同时，来自复合材料界面的两反射波波峰同时回到原点处并叠加，记录为图 5.21 (a) 中每条曲线的第二个波包；然后，两反射波互不干扰的穿过彼此，并重复上述过程。另外，由于波在材料中传播的速度与材料属性 β_c 相关，因此每个波峰到达记录点的时间也与 β_c 相关。

5.3.6.3 一维震源模拟

长期以来人工边界条件在地震模拟中发挥着重要作用^[175]，本节以 Ricker 脉冲下的一维半无限大区域为例，探讨 PTBCs 在地震模拟中的应用。如图 5.22 所示，计算区域仍为 $x \in [-10, 10]$ ，微模量函数为 (5.99)，左端施加 PTBC2，右端自由，在原点处施加 Ricker 脉冲

$$u(0) = (1 - 2\pi^2 f_p^2 (t - t_D)^2) e^{-\pi^2 f_p^2 (t - t_D)^2}, \quad \dot{u}(x) = 0 \quad (5.122)$$

其中 f_p 为峰值频率， t_D 为延迟时间，无量纲参数 $f_p = 2$ 、 $t_D = 5$ 、 $\ell = 0.25$ 。

记录原点和左右两端等三点的位移随时间的变化历史，数值计算结果如图 5.23 所示。由图可知具体波动过程如下：首先 Ricker 脉冲在原点处产生，并分别传播至两端，在 $t = 5$ 时，Ricker 脉冲的峰值为 1，与式 (5.122) 一致；其次，Ricker 脉冲在 $t = 15$ 时到达两端，位移幅值在右端自由边界处翻倍（图 5.23 (b)），Ricker 脉冲几乎无反射地通过左侧边界（图 5.23 (c)）；最后，右端自由边界反射的波几乎无反射地通过左侧边界条件，随后整个计算区域几乎处于静止状态（图 5.23 中各曲线最后均无波动）。整个过程与 Ricker 脉冲在一维半无限大域内传播的直观规律相吻合，反映了 PTBC2 在处理震源问题时的有效性，进而说明 PTBCs 为 PD 运用到地震模拟中提供了一种数值工具。

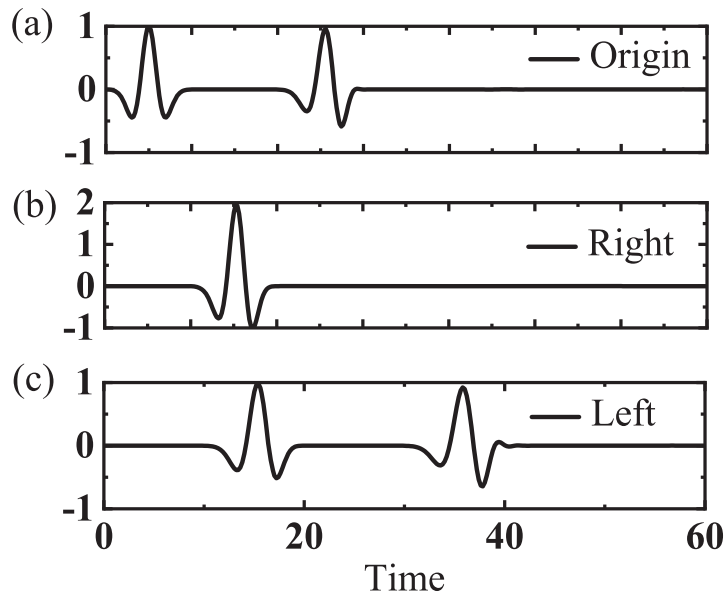


图 5.23 三个选取点处的位移记录: (a) 原点; (b) 右端; (b) 左端

5.4 本章小结

本章主要研究了 PD 在两类动态界面问题中的应用, 分别为 kink 传播和人工边界的设计。

对于 kink 传播而言, 基于离散的粒子系统, 提出了 PD 模型, 并利用该模型研究了 kink 传播的平衡构形、动态解及其动力学关系, 探讨了 PD 与其他连续介质模型的关系, 其主要结论包括:

(1) 通过 PD 模型和离散粒子模型的色散关系的匹配, 可以确定 PD 模型中的各参数, 且两模型均含有特征长度。较之于不含有特征长度的经典模型而言, PD 模型克服了经典模型中给定外力无法确定 kink 传播速度的困难; 由色散关系可知, PD 模型避免了 Boussinesq 近似模型在短波处不稳定的问题。基于 PD 模型, kink 平衡构形在两相界面处存在位移跳跃, 跳跃值的大小与 PD 模型的参数相关; kink 传播的动态解与准连续模型解的形式一致, 且后者可看作是 PD 模型非局部特征长度取某一特定值的特例, 该动态解在 kink 传播速度趋于零时, 与静态解自洽; PD 模型自带外力和 kink 传播速度一一对应的动力学关系, 避免了离散模型在 kink 传播速度较小时, 外力无法确定的问题。

(2) 将 PD 模型中的双势阱函数推广至更一般的非线性函数, 建立了将微分模型等效为 PD 模型的方法, 并给出了计算等效 PD 模型的微模量函数的计算公式。当微分型方程中非惯性项中的空间微分阶数高于惯性项时, 等效微模量函数将含有 Dirac 函数的导数, 表现为广义函数。

对于人工边界而言, 提出了针对线性问题的透射人工边界条件、弱非线性问题的人工透射边界条件、双向边界条件, 并将其运用到了缺陷损伤、复合材料和震源模拟

等实际问题中，其主要结论为：

(1) 通过反射系数分析和数值算例表明，针对线性问题中低频波和高频波等不同的实际情况提出的 PD 透射边界条件 PTBCs，可实现出射波几乎无反射的透过边界；结合局部线性化的概念和 PTBCs 提出的弱非线性问题的人工边界条件，能够很好地确保出射波的无反射地透过边界；双向边界条件即可保证出射波无反射的从边界通过，又可实现入射波不失真地注入计算区域。

(2) 本章提出的人工边界条件在时间和空间上均依赖于边界附近点的材料信息，与内部点的材料信息无关，较易于内部信息较复杂的波动问题中。通过缺陷损伤、复合材料和震源模拟等证实了以上结论。

第六章 论文工作总结

以复合材料、超材料等非均质材料迅猛发展为背景，本文主要针对非均质材料的宏观性能描述，开展了一系列有关时空耦合非局部理论的研究工作，包括时空耦合非局部理论的起源、变换不变性、热弹性理论、近场动力学解析解及动态界面问题等，主要研究成果如下：

(1) 基于非均质材料模型导出了其宏观性能满足的时空耦合控制方程；其惯性项、非惯性项和体力项中均存在时空耦合非局部性，时空耦合非局部性来自于材料的非均质性；该方程同样适用于孔洞和刚性夹杂的情况。利用该方程建立了与现有非局部理论的关系，为解决现有非局部理论物理机制不明确、材料参数无法定量表征的问题提供了一种思路。该方程可看作是 Mindlin 方程的积分弱形式，也可表达为速度耦合项不为零的 Willis 方程，可退化为 Kröner 方程，近似为 Eringen 方程、线性化 PD、动力非局部 PD；基于复合材料圆柱模型的一维时空耦合控制方程又可近似为时空耦合非局部 PD (STPD)。本文得到的时空耦合非局部方程与 Mindlin 方程具有类似的色散关系，包括了声学支和光学支。探讨了非局部弹性理论的变换不变性。研究表明，除 Willis 方程外，仅仅具有积分项不含空间微分项的积分型非局部方程也满足变换不变性，如 Eringen 方程、Kunin 方程和 PD 方程；由时空耦合控制方程近似得到的时空耦合非局部 PD 方程可同时满足我们建议的三点要求，在这个意义上可看作是一种比较理想的非局部理论的控制方程。

(2) 利用复合材料圆柱模型，探究了时空耦合非局部热弹性理论的起源。结果表明，方程中的惯性项、非惯性项及热力耦合项均具有时空耦合非局部项。仅考虑热传导时，时空耦合的热传导方程可近似为空间非局部的 PD 热扩散方程，也可近似为时间非局部的经典 DPL 模型。简单的静态力平衡和稳态热传导算例表明非局部方程能自然地捕捉到经典局部方程无法轻易计算出的边界效应。随后建立了一种适用于不连续和超常规传热的时空耦合非局部热传导模型，即 PD 非傅里叶理论，提出了该模型的数值计算框架，该模型的预测值与实验值能够很好的吻合。在 PD 非傅里叶模型的基础上发展了 PD 广义热弹性模型，并证明了其解的唯一性定理。

(3) 研究了线性化态型 PD 理论的基本动态特性、初-边值问题一般解和基本解、间断条件及不连续场的演化规律，以及 PD 热扩散模型的一般解和基本解。主要结论可归结为以下几点：其一，在基本动态特性方面，本文发现对于负泊松比材料，弹性波的色散关系、群速度和相速度在短波极限附近某一范围内，大于相应的经典值，该现象颠覆了非局部理论给人的常规印象；此外，与连续型权函数相比，截断型权函数

对应的色散关系、群速度和相速度均出现了波动现象，在短波极限处的角频率极限值较大，而衰减速度较慢。其二，针对动静态格林函数中的发散积分，本文提出了不同的分解方案：将动态格林函数和三维静态格林函数分解为 Dirac 函数和收敛积分之和；将一维和二维静态格林函数分解为相应的经典静态格林函数、Dirac 函数和收敛积分之和。其三，在不连续场变化规律方面，本文推得的不连续间断条件表明，若某一面两侧存在速度间断，则该面在其法向方向上保持静止，反之，若某一面沿法向运动，则该面上速度场连续；不连续场的演化规律进一步表明，初始条件和体力的不连续均会导致位移场、速度场和加速度场的不连续，且不连续场演化方程在各分量方向上相互解耦，解耦后各分量遵循相同的演化规律，对于 PD 理论中常用的核函数，各分量呈现简谐变化，且对初始条件和体力的不连续扰动的响应是稳定的。其四，在 PD 热扩散方面，PD 热扩散的一般解及格林函数与经典理论具有相似的形式，且在非局部特征长度趋于零时收敛于经典解；其稳态格林函数同样可分解为特殊函数和收敛积分之和；算例表明非稳态 PD 热扩散响应的变化滞后于相应的经典解。

(4) 基于近场动力学研究了两类动态界面问题：kink（扭结）的传播和人工透射边界条件的设计。针对 kink 传播，建立了 PD 模型及其参数的具体确定方法；随后利用该 PD 模型研究了 kink 的传播，包括平衡构形、稳定动态解和动力学关系；最后针对一般的动态非线性问题，探讨了 PD 模型与其他微分型连续模型之间的关系，给定任一微分型连续模型，给出了计算其等效 PD 模型计算方法。关于 kink 传播的研究结果表明：第一，PD 模型的动态封闭解在 kink 传播速度趋于零时与静态解自洽；第二，PD 模型的动态封闭解与准连续模型的解一致，且后者可看作是 PD 模型非局部特征长度取某一特定值的特例；第三，PD 模型具有外力和传播速度一一对应的动力学关系，能够克服晶格模型、经典线弹模型和 Boussinesq 模型的动力学关系的缺点。针对人工边界条件，构建了 PD 数值模拟时的人工透射边界条件。该边界可消除出射波在人工截断边界处产生的不符合物理事实的反射，可推广至弱非线性问题。在该边界基础上又进一步构建了双向边界条件，可同时实现出射波的无反射和入射波的不失真。本文提出的边界条件中的系数仅依赖于边界附近点的材料信息，而与内部点的信息无关，因此可用于处理较为复杂的波动问题。最后，通过计算含有损伤的材料和复合材料中弹性波的传播，以及由震源产生的弹性波的传播，证实了本文构建的边界条件的有效性。

参考文献

- [1] 黄筑平. 连续介质力学基础. 北京: 高等教育出版社 2006.
- [2] Eringen A C. Nonlocal Continuum Field Theories. New York: Springer-Verlag, 2002.
- [3] Kröner E. Elasticity theory of materials with long range cohesive forces. *International Journal of Solids and Structures*, 1967, 3(5):731–742.
- [4] Eringen A C. Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane-waves. *International Journal of Engineering Science*, 1972, 10(5):425–435.
- [5] Eringen A C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of Applied Physics*, 1983, 54(9):4703–4710.
- [6] Silling S A. Reformation of elasticity theory for discontinuities and longrange force. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2000, 48(1):175–209.
- [7] Silling S A, Epton M, Weckner O, et al. Peridynamic states and constitutive modeling. *Journal of Elasticity*, 2007, 88(2):151–184.
- [8] Silling S A, Lehoucq R. Peridynamic theory of solid mechanics. *Advances in Applied Mechanics*, 2010, 44(10):73–168.
- [9] Askes H, Aifantis E C. Gradient elasticity in statics and dynamics: An overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results. *International Journal of Solids and Structures*, 2011, 48(13):1962–1990.
- [10] Dayal K. Leading-order nonlocal kinetic energy in peridynamics for consistent energetics and wave dispersion. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2017, 105:235–253.
- [11] Bažant Z P, Jirasek M. Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: Survey of progress. *Journal of Engineering Mechanics*, 2002, 128(11):1119–1149.
- [12] 胡更开, 刘晓宁, 荀飞. 非均匀微极介质的有效性质分析. *力学进展*, 2004, 34(2):195–214.
- [13] Hashin Z. Analysis of composites materials-a survey. *Journal of Applied Mechanics*, 1983, 50(3):481–505.
- [14] Silling S A. Origin and effect of nonlocality in a composite. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2014, 9(2):245–258.
- [15] Maugin G A. *Non-Classical Continuum Mechanics: A Dictionary*. Singapore: Springer, 2017.
- [16] 刘咏泉. 基于坐标变换和超材料设计的弹性波控制研究 [D]. 北京大学, 2015.
- [17] Shamonina E, Solymar L. Metamaterials: How the subject started. *Metamaterials*, 2007, 1(1):12–18.
- [18] Milton G W, Briane M, Willis J R. On cloaking for elasticity and physical equations with a transformation invariant form. *New Journal of Physics*, 2006, 8(10):248.
- [19] Norris A N, Shuvalov A L. Elastic cloaking theory. *Wave Motion*, 2011, 48(6):525–538.
- [20] Willis J R. Variational and related methods for the overall properties of composites. *Advances in Applied Mechanics*, 1981, 21:1–78.

- [21] Willis J R. The non-local influence of density variations in a composite. *International Journal of Solids and Structures*, 1985, 21(7):805–817.
- [22] Xiang Z H. The form-invariance of wave equations without requiring a priori relations between field variables. *Science China*, 2014, 57(12):2285–2296.
- [23] Whitehead A N. *The Principle of Relativity with Applications to Physical Science*. Cambridge: Cambridge University Press, 1922.
- [24] Duhem P. Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique. *Annales Scientifiques De L École Normale Supérieure*, 1983, 10(3):183–230.
- [25] 赵亚溥. 近代连续介质力学. 北京: 科学出版社 2016.
- [26] Rogula D. Introduction to nonlocal theory of material media. *Nonlocal theory of material media, CISM courses and lectures*, D. Rogula, ed., Springer, Wien, 1982, 268:125–222.
- [27] Krumhansl J A. Generalized continuum field representation for lattice vibrations. *Lattice dynamics*, R. F. Wallis, ed., Pergamon, London, 1965. 627–634.
- [28] Kunin I A. Theory of elasticity with spatial dispersion one-dimensional complex structure. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1966, 30(5):1025–1034.
- [29] Kunin I A. Model of an elastic medium of simple structure with three-dimensional dispersion. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1967, 30(3):642–652.
- [30] 黄再兴, 朱金福, 黄维扬. 非局部场论的发展历史、研究现状及前景. *江苏力学*, 1996, 11:27–33.
- [31] 姚寅. 非局部连续介质力学中的若干问题分析 [D]. 南京航空航天大学, 2010.
- [32] Edelen D G B, Green A E, Laws N. Nonlocal continuum mechanics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1971, 43(1):36–44.
- [33] Edelen D G B, Laws N. On the thermodynamics of systems with nonlocality. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1971, 43(1):24–35.
- [34] Eringen A C, Edelen D G B. On nonlocal elasticity. *International Journal of Engineering Science*, 1972, 10(3):233–248.
- [35] Eringen A C, Kim B S. Stress concentration at the tip of a crack. *International Journal of Engineering Science*, 1974, 1(4):233–237.
- [36] Eringen A C, Speziale C G, et al. Crack-tip problem in nonlocal elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1977, 25(5):339–355.
- [37] Polizzotto C. Nonlocal elasticity and related variational principles. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, 38(42):7359–7380.
- [38] Polizzotto C, Fuschi P, Pisano A A. A nonhomogeneous nonlocal elasticity model. *European Journal of Mechanics*, 2006, 25(2):308–333.
- [39] Wang K F, Wang B L, Kitamura T. A review on the application of modified continuum models in modeling and simulation of nanostructures. *Acta Mechanica Sinica*, 2016, 32(1):83–100.
- [40] Rafii-Tabar H, Ghavanloo E, A F S. Nonlocal continuum-based modeling of mechanical characteristics of nanoscopic structures. *Acta Mechanica Sinica*, 2016, 638(6):1–97.
- [41] 杨昌玉. 非局部理论下纳米结构动力行为的辛方法 [D]. 大连理工大学, 2016.
- [42] 刘辰. 非局部压电纳米板的振动和稳定性研究 [D]. 北京交通大学, 2016.

- [43] Liu C, Ke L L, Wang Y S, et al. Thermo-electro-mechanical vibration of piezoelectric nanoplates based on the nonlocal theory. *Composite Structures*, 2013, 106(12):167–174.
- [44] Milton G W, Willis J R. On modifications of Newton's second law and linear continuum elastodynamics. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 2007, 463(2079):865–880.
- [45] Willis J R. Effective constitutive relations for waves in composites and metamaterials. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 2011, 467(2131):1865–1879.
- [46] Nassar H, He Q C, Auffray N. On asymptotic elastodynamic homogenization approaches for periodic media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2016, 88:274–290.
- [47] Nassar H, He Q C, Auffray N. Willis elastodynamic homogenization theory revisited for periodic media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2015, 77:158–178.
- [48] Xiang Z H, Yao R W. Realizing the Willis equations with pre-stresses. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2016, 87:1–6.
- [49] 姚瑞文. 关于 Willis 形式线弹性力学方程的初步研究 [D]. 清华大学, 2017.
- [50] Nassar H, Xu X C, Norris A N, et al. Modulated phononic crystals: Non-reciprocal wave propagation and Willis materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2017, 101:10–29.
- [51] Kunin I A. *Elastic Media with Microstructure I: One-Dimensional Models*. Berlin: Springer-Verlag, 1982.
- [52] Kunin I A. *Elastic Media with Microstructure II: Three-Dimensional Models*. Berlin: Springer-Verlag, 1983.
- [53] 黄丹, 章青, 乔丕忠等. 近场动力学方法及其应用. *力学进展*, 2010, 40(4):448–459.
- [54] Silling S A, Askari E. A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics. *Computers and Structures*, 2005, 83(17-18):1526–1535.
- [55] Weckner O, Emmrich E. Numerical simulation of the dynamics of a non-local inhomogeneous, infinite bar. *Journal of Computational and Applied Mechanics*, 2005, 6(2):311–319.
- [56] Weckner O, Abeyaratne R. The effect of long-range forces on the dynamics of a bar. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2005, 53(3):705–728.
- [57] Macek R W, Silling S A. Peridynamics via finite element analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2007, 43(15):1169–1178.
- [58] Kilic B. Peridynamic theory for progressive failure prediction in homogeneous and heterogeneous materials[D]. The University of Arizona, 2008.
- [59] Lehoucq R B, Silling S A. Force flux and the peridynamic stress tensor. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2008, 56(4):1566–1577.
- [60] Warren T L, Silling S A, Askari A, et al. A non-ordinary state-based peridynamic method to model solid material deformation and fracture. *International Journal of Solids and Structures*, 2009, 46(5):1186–1195.
- [61] Silling S A. Linearized theory of peridynamic states. *Journal of Elasticity*, 2010, 99(1):85–111.
- [62] Madenci E, Oterkus E. *Peridynamic Theory and Its Applications*. New York: Springer-Verlag, 2014.

- [63] Emmrich E, Weckner O. The peridynamic equation of motion in non-local elasticity theory. In: C.A. Mota Soares, et al. (Eds.), *Proceeding of III European Conference on Computational Mechanics: Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering*, Lisbon, Portugal, 2006.
- [64] Emmrich E, Weckner O. Analysis and numerical approximation of an integro-differential equation modeling non-local effects in linear elasticity. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2007, 4(4):363–384.
- [65] Emmrich E, Weckner O. On the well-posedness of the linear peridynamic model and its convergence towards the navier equation of linear elasticity. *Communications in Mathematical Sciences*, 2007, 5(5):851–864.
- [66] Du Q, Zhou K. On the well-posedness of the linear peridynamic model and its convergence towards the navier equation of linear elasticity. *Esaim Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 2011, 45(2):217–234.
- [67] Erbay H A, Erkip A, Muslu G M. The cauchy problem for a one-dimensional nonlinear elastic peridynamic model. *Journal of Differential Equations*, 2012, 252:4392–4409.
- [68] Parks M L, Lehoucq R B, Plimpton S J, et al. Implementing peridynamics within a molecular dynamics code. *Computer Physics Communications*, 2008, 179(11):777–783.
- [69] Kilic B, Agwai A, Madenci E. Peridynamic theory for progressive damage prediction in center-cracked composite laminates. *Composite Structures*, 2009, 90(2):141–151.
- [70] Kilic B, Madenci E. Prediction of crack paths in a quenched glass plate by using peridynamic theory. *International Journal of Fracture*, 2009, 156(2):165–177.
- [71] Bobaru F, Yang M, Alves L F, et al. Convergence, adaptive refinement, and scaling in 1d peridynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2009, 77(6):852–877.
- [72] Xu J, Askari A, Weckner O, et al. Peridynamic analysis of impact damage in composite laminates. *Journal of Aerospace Engineering*, 2008, 21(3):187–194.
- [73] Askari A, Nelson K, Weckner O, et al. Hail impact characteristics of a hybrid material by advanced analysis techniques and testing. *Journal of Aerospace Engineering*, 2011, 24(2):210–217.
- [74] Hu W, Ha Y D, Bobaru F. Modeling dynamic fracture and damage in fiber-reinforced composite lamina with peridynamics. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2011, 9(6):707–726.
- [75] Hu W, Ha Y D, Bobaru F. Peridynamic model for dynamic fracture in unidirectional fiber-reinforced composites. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2012, 217-220(3):247–261.
- [76] 胡祎乐. 基于近场动力学的 FRP 层压板建模与分析 [D]. 上海交通大学, 2013.
- [77] Askari A, Bobaru F, Lehoucq R B, et al. Peridynamics for multiscale materials modeling. *Journal of Physics: Conference Series*, 2008, 125(1).
- [78] Sun S, Sundararaghavan V. A peridynamic implementation of crystal plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, 51(19-20):3350–3360.
- [79] Dayal K, Bhattacharya K. Kinetics of phase transformations in the peridynamic formulation of continuum mechanics. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2006, 54(9):1811–1842.
- [80] Silling S A, Bobaru F. Peridynamic modeling of membranes and fibers. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2005, 40(2-3):395–409.

-
- [81] Silling S A, Lehoucq R B. Statistical coarse-graining of atomistics into peridynamics. Sandia National Laboratory Report, 2007.
- [82] Lehoucq R B, Silling S A. Atoms and peridynamic continua. Sandia National Laboratory Report, 2007.
- [83] Mindlin R D. Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1964, 16(1):51–78.
- [84] Aifantis E C. On the role of gradients in the localization of deformation and fracture. *International Journal of Engineering Science*, 1992, 30(10):1279–1299.
- [85] Aifantis E C. Strain gradient interpretation of size effects. *International Journal of Fracture*, 1999, 95(1):299–314.
- [86] Seleson P, Parks M L, Gunzburger M, et al. Peridynamics as an upscaling of molecular dynamics. *Multiscale Modeling and Simulation*, 2009, 8(1):204–227.
- [87] Sieck C F, Alù A, Haberman M R. Origins of Willis coupling and acoustic bianisotropy in acoustic metamaterials through source-driven homogenization. *Physical Review B*, 2017, 96:104303.
- [88] Hashin Z, Rosen B W. The elastic moduli of fiber-reinforced materials. *Journal of Applied Mechanics*, 1964, 31(2):223–232.
- [89] Tzou D Y, Guo Z Y. Nonlocal behavior in thermal lagging. *International Journal of Thermal Sciences*, 2010, 49(7):1133–1137.
- [90] Lord H W, Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1967, 15(5):229–309.
- [91] Green A E, Lindsay K A. Thermoelasticity. *Journal of Elasticity*, 1972, 2(1):1–7.
- [92] Green A E, Lindsay K A. Nonclassical dynamical thermoelasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, 37(1-2):215–224.
- [93] Nemat-Nasser S, Hori M. *Micromechanics: Overall Properties of Heterogenous Materials*. Amsterdam: Elsevier, 1993.
- [94] Alali B, Lipton R. Multiscale dynamics of heterogeneous media in the peridynamic formulation. *Journal of Elasticity*, 2012, 106(1):71–103.
- [95] Ricker S, Mergheim J, Steinmann P. On the multiscale computation of defect driving forces. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2009, 7(5):457–474.
- [96] Mandadapu K K, Sengupta A, Papadopoulos P. A homogenization method for thermomechanical continua using extensive physical quantities. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 2012, 468(2142):1696–1715.
- [97] Souza Neto E A, J B P, Sánchez P J, et al. An RVE-based multiscale theory of solids with micro-scale inertia and body force effects. *Mechanics of Materials*, 2015, 80:136–144.
- [98] Engelbrecht J, Berezovski A, Pastrone F, et al. A micromechanics-based nonlocal constitutive equation incorporating three-point statistics for random linear elastic composite materials. *Philosophical Magazine*, 2005, 85(33-35):4127–4141.
- [99] Wildman R A, Gazonas G A. Higher gradient expansion for linear isotropic peridynamic materials. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2017, 22(6):1483–1493.

- [100] Liu Y J, Song G, Yin H M. Boundary effect on the elastic field of a semi-infinite solid containing inhomogeneities. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 2015, 471(2179):20150174.
- [101] Drugan W J, Willis J R. A micromechanics-based nonlocal constitutive equation and estimates of representative volume element size for elastic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1996, 44(4):497–524.
- [102] Monetto I, Drugan W J, Willis J R. A micromechanics-based nonlocal constitutive equation and minimum rve size estimates for random elastic composites containing aligned spheroidal heterogeneities. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2009, 57(9):1578–1595.
- [103] Drugan W J, Willis J R. A micromechanics-based nonlocal constitutive equation incorporating three-point statistics for random linear elastic composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2016, 91:291–310.
- [104] Gao X, Li K. A shear-lag model for carbon nanotube-reinforced polymer composites. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, 42(5):1649–1667.
- [105] Mikata Y. Analytical solutions of peristatic and peridynamic problems for a 1d infinite rod. *International Journal of Solids and Structures*, 2012, 49(21):2887–2897.
- [106] 徐杰. 急速热冲击下材料的传热及力学特性的分析 [D]. 江苏大学, 2016.
- [107] 卢天健, 徐峰. 皮肤传热的双相位滞后模型. *西安交通大学学报*, 2009, 43(5):1–7.
- [108] 尉亚军. 微纳尺度热弹耦合模型的理论与应用研究 [D]. 西安交通大学, 2016.
- [109] Oterkus S, Madenci E, Agwai A. Peridynamic thermal diffusion. *Journal of Computational Physics*, 2014, 265:71–96.
- [110] Tzou D Y. A unified field approach for heat conduction from macro- to micro-scales. *Journal of Heat Transfer*, 1995, 117(1):8–16.
- [111] Kaddour A S, Hinton M J. Input data for test cases used in benchmarking triaxial failure theories of composites. *Journal of Composite Materials*, 2012, 46(19-20):2295–2312.
- [112] Luciano R, Willis J R. Boundary-layer corrections for stress and strain fields in randomly heterogeneous materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2003, 51(6):1075–1088.
- [113] Luciano R, Willis J R. Fe analysis of stress and strain fields in finite random composite bodies. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2005, 53(7):1505–1522.
- [114] Levin V M. On the coefficients of thermal expansion of heterogeneous materials. *Mechanics of Solids*, 1967, 2:58–61.
- [115] Duan H L, Karihaloo B L. Thermo-elastic properties of heterogeneous materials with imperfect interfaces: Generalized Levin’s formula and Hill’s connections. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2007, 55(5):1036–1052.
- [116] Alibeigloo A. Elasticity solution of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite cylindrical panel subjected to thermo mechanical load. *Composites Part B*, 2016, 87(7):214–226.
- [117] Nan C W, Birringer R, Clarke D R, et al. Elastic cloaking theory. *Journal of Applied Physics*, 1997, 81(10):6692–6699.
- [118] Tzou D Y. *Macro- to Microscale Heat Transfer: The Lagging Behavior* (2nd ed.). Wiley: New York, 2014.

-
- [119] Xu F, Seffen K A, Lu T J. Non-fourier analysis of skin biothermomechanics. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2008, 51(9-10):2237–2259.
- [120] Gerstle W, Silling S A, Read D, et al. Peridynamic simulation of electromigration. *Computers Materials and Continua*, 2008, 8(2):75–92.
- [121] Bobaru F, Duangpanya M. The peridynamic formulation for transient heat conduction. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2010, 53(19-20):4047–4059.
- [122] Bobaru F, Duangpanya M. A peridynamic formulation for transient heat conduction in bodies with evolving discontinuities. *Journal of Computational Physics*, 2012, 231(7):2764–2785.
- [123] Kundu B, Lee K S. Fourier and non-fourier heat conduction analysis in the absorber plates of a flat-plate solar collector. *Solar Energy*, 2012, 86(10):3030–3039.
- [124] Gembarovic J. Non-fourier heat conduction modeling in a finite medium. *International Journal of Thermophysics*, 2004, 25(3):1261–1268.
- [125] Loh J S, Azid I A, Seetharamu K N, et al. Fast transient thermal analysis of fourier and non-fourier heat conduction. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2007, 50(21-22):4400–4408.
- [126] Chen G. Ballistic-diffusive heat-conduction equations. *Physical Review Letters*, 2001, 86(11):2297–2300.
- [127] Qiu T Q, Juhasz T, Suarez C, et al. Femtosecond laser-heating of multilayer metals-ii. experiments. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1994, 37(17):2799–2808.
- [128] Ho C Y, Wen M Y, Chen B C, et al. Non-fourier two-temperature heat conduction model used to analyze ultrashort-pulse laser processing of nanoscale metal film. *Journal of Nanoscience and Nanotechnology*, 2014, 14(7):5581–5586.
- [129] Tian X, Zhang J, Shen Y, et al. Finite element method for generalized piezothermoelastic problems. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, 44(18-19):6330–6339.
- [130] Oterkus S, Madenci E, Agwai A. Fully coupled peridynamic thermomechanics. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2014, 64(1):1–23.
- [131] Zimmermann M. A continuum theory with long-range forces for solids[D]. Massachusetts Institute of Technology, 2005.
- [132] Weckner O, Brunk G, Epton M A, et al. Green’s functions in non-local three-dimensional linear elasticity. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 2009, 465(2112):3463–3487.
- [133] Seleson P, Parks M. On the role of the influence function in the peridynamic theory. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2011, 9(6):689–706.
- [134] Wildman R A, Gazonas G A. A finite difference-augmented peridynamics method for reducing wave dispersion. *International Journal of Fracture*, 2014, 190(1-2):39–52.
- [135] Bažant Z P, Luo W, Chau V T, et al. Wave dispersion and basic concepts of peridynamics compared to classical nonlocal damage models. *Journal of Applied Mechanics*, 2016, 83(11):111004.
- [136] Butt S N, Timothy J J, Meschke G. Wave dispersion and propagation in state-based peridynamics. *Computational Mechanics*, 2017, 60(5):1–14.
- [137] Chen Z, Bobaru F. Peridynamic modeling of pitting corrosion damage. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2015, 78:352–381.

- [138] Chen Z, Bobaru F. Selecting the kernel in a peridynamic formulation: A study for transient heat diffusion. *Computer Physics Communications*, 2015, 197:51–60.
- [139] Gunzburger M, Lehoucq R B. A nonlocal vector calculus with application to nonlocal boundary value problem. *Multiscale Modeling and Simulation*, 2010, 8(5):1581–1598.
- [140] Silling S A. Linearized theory of peridynamic states. *Journal of Elasticity*, 2010, 99(1):85–111.
- [141] Sarego G, Le Q, Bobaru F, et al. Linearized state-based peridynamics for 2-d problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2016, 108(10):1174–1197.
- [142] Le Q V, Bobaru F. Objectivity of state-based peridynamic models for elasticity. *Journal of Elasticity*, 2017, 56:1–17.
- [143] Du Q, Gunzburger M, Lehoucq R B, et al. Analysis and approximation of nonlocal diffusion problems with volume constraints. *Siam Review*, 2012, 54(4):667–696.
- [144] Ward A, Hilitiski F, Schwenger W, et al. Solid friction between soft filaments. *Nature Materials*, 2015, 14(6):583–588.
- [145] Thevamaran R, Fraternali F, Daraio C. Multiscale mass-spring model for high-rate compression of vertically aligned carbon nanotube foams. *Journal of Applied Mechanics*, 2014, 81(12):121006.
- [146] Scott A C. A nonlinear klein-gordon equation. *American Journal of Physics*, 1969, 37(1):52.
- [147] Frenkel J, Kontorova T A. On the theory of plastic deformation and twinning. *Phys. Z. Sowiet union*, 1938, 13(1).
- [148] Bishop A R, Lewis W F. A theory of intrinsic coercivity in narrow magnetic domain wall materials. *Journal of Physics C Solid State Physics*, 1979, 12(18):3811.
- [149] Braun O M, Bishop A R, Roder J. Hysteresis in the under damped driven frenkel-kontorova model. *Physical Review Letters*, 1997, 79(19):3692–3695.
- [150] Rotermund H H, Jakubith S, Oertzen A, et al. Solitons in a surface reaction. *Physical Review Letters*, 1991, 66(23):3083–3086.
- [151] Stewart W C. Current-voltage characteristics of josephson junctions. *Applied Physics Letters*, 1968, 12(8):277–280.
- [152] Scott A C. The electrophysics of a nerve fiber. *Journal of Biological Physics*, 1976, 4(3-4):166–191.
- [153] Braun O M, Hu B, Filippov A, et al. Traffic jams and hysteresis in driven one-dimensional systems. *Physical Review E*, 1998, 58(2):1311–1324.
- [154] Atkinson W, Cabrera N. Motion of a frenkel-kontorowa dislocation in a one-dimensional crystal. *Physical Review*, 1965, 138(3A):763–766.
- [155] Puglisi G, Truskinovsky L. Mechanics of a discrete chain with bi-stable elements. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2000, 48(1):1–27.
- [156] Truskinovsky L, Vainchtein A. Peierls-nabarro landscape for martensitic phase transitions. *Physical Review B*, 2003, 67(17):172103.
- [157] Truskinovsky L, Vainchtein A. Kinetics of martensitic phase transitions: lattice model. *Siam Journal on Applied Mathematics*, 2005, 66(2):533–553.
- [158] Truskinovsky L, Vainchtein A. Quasicontinuum models of dynamic phase transitions. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 2006, 18(1):1–21.

-
- [159] Vainchtein A, Kevrekidis P. Dynamics of phase transitions in a piecewise linear diatomic chain. *Journal of Nonlinear Science*, 2012, 22(1):107–134.
- [160] P R, Vainchtein A. New solutions for slow moving kinks in a forced frenkel-kontorova chain. *Journal of Nonlinear Science*, 2013, 23(6):1089–1110.
- [161] Braun O M, Kivshar Y. *The Frankel Kontorova Model: Concepts, Methods and Applications*. New York: Springer-Verlag, 2004.
- [162] Slepyan L. *Models and Phenomena in Fracture Mechanics*. New York: Springer, 2002.
- [163] Abeyaratne R, Vedantam S. Propagation of a front by kink motion. In: Argoul, P, et al. (Ed.), *IUTAM Symposium on Variations of Domains and Free Boundary Problems in Solid Mechanics*, Kluwer, Dordrecht, 1999. 77–84.
- [164] Kresse O. Lattice models of propagating defects[D]. University of Minnesota, 2002.
- [165] Kresse O, Truskinovsky L. Mobility of lattice defects: discrete and continuum approaches. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2003, 51(7):1305–1332.
- [166] Rosenau P. Dynamics of dense lattices. *Physical Review B*, 1987, 36(11):5868–5876.
- [167] Abeyaratne R, Vedantam S. A lattice-based model of the kinetics of twin boundary motion. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2003, 51(9):1675–1700.
- [168] Hildebrand F, Abeyaratne R. An atomistic investigation of the kinetics of detwinning. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2008, 56(4):1296–1319.
- [169] Liao Z P, Wong H L. A transmitting boundary for the numerical simulation of elastic wave propagation. *International Journal of Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 1984, 3(4):174–183.
- [170] Wang X, Tang S. Matching boundary conditions for lattice dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2013, 93(12):1255–1285.
- [171] Kelle J B, Givoli D. Exact non-reflecting boundary-conditions. *Journal of Computational Physics*, 1989, 82(1):172–192.
- [172] Wildman R A, Gazonas G A. A perfectly matched layer for peridynamics in two dimensions. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2012, 7(8-9):765–781.
- [173] Park H S, Karpov E G, Klein P A, et al. Three-dimensional bridging scale analysis of dynamic fracture. *Journal of Computational Physics*, 2005, 207(2):588–609.
- [174] Whitham G B. *Linear and Nonlinear Waves*. Cambridge: New York, 2011.
- [175] 廖振鹏. *工程波动理论导论*. 北京: 科学出版社 2002.

博士期间发表和完成的论文

- [1] **Wang, LJ.**, Xu, J., Wang, J., Static and dynamic Green's functions in peridynamics. *Journal of Elasticity*, 2017. 126: 95-125. (SCI 收录期刊; SCI 收录号 000390026600005; IF=1.909)
- [2] **Wang, LJ.**, Xu, J., Wang, J., The Green's functions for peridynamic non-local diffusion. *Proceedings of the Royal Society A*, 2016. 472: 20160185. (SCI 收录期刊; SCI 收录号 000391098900006; IF=2.146)
- [3] **Wang, LJ.**, Chen, Y., Xu, J., Wang, J., Transmitting boundary conditions for 1D peridynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2017. 110: 379-400. (SCI 收录期刊; SCI 收录号 000398799900004; IF=2.162)
- [4] **Wang, LJ.**, Xu, J., Wang, J., A peridynamic framework and simulation of non-Fourier and non-local heat conduction. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2018. 118: 1284-1292. (SCI 收录期刊; SCI 收录号 000423647700111; IF=3.458)
- [5] **Wang, LJ.**, Abeyaratne, R., A one-dimensional peridynamic model of kink propagation and its relation to certain other continuum models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2018. 116: 334-349. (SCI 收录期刊; IF=4.255)
- [6] **Wang, LJ.**, Xu, J., Wang, J., Karihaloo, B., An explicit spatiotemporal non-local formulation for elastodynamics of composites. *Mechanics of Materials*, In revision.
- [7] **Wang, LJ.**, Xu, J., Wang, J., The elastodynamics in linearized isotropic stated-based peridynamic material. *Journal of Elasticity*, Under review.
- [8] **Wang, LJ.**, Wang, J., On the invariance of current theories of elasticity. *Journal of Elasticity*, Under review.
- [9] **Wang, LJ.**, Xu, J., Wang, J., The well-posedness of peridynamic generalized thermoelasticity. To be submitted.
- [10] **Wang, LJ.**, Xu, J., Wang, J., Karihaloo, B., A coupled spatiotemporal non-local approach to the thermo-elastic dynamics of composites. In preparation.

个人简历

基本信息

王林娟，女，河南周口人，汉族，中共党员。

电子邮箱：wlj@pku.edu.cn

背景资料

2012 年于山东大学获得学士学位，2012 年至今在北京大学力学与工程科学系攻读固体力学博士学位，导师王建祥教授，主要从事非局部弹性动力学的理论研究。已发表 SCI 论文五篇，包括 Journal of the Mechanics and Physics of Solids, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Proceedings of the Royal Society A, Journal of Elasticity, International Journal of Heat and Mass Transfer 等国际期刊。于 2016.10-2017.9 在美国 Massachusetts Institute of Technology 大学机械学院交流访问。主要参与国家自然科学基金创新群体项目（编号：11521202）和国家自然科学基金重点项目（编号：11231001）。

获得荣誉

北京大学固体力学博士专业奖学金（2016 年）

CICIFSA 博士生奖学金二等奖（2016 年）

北京大学学习优秀奖（2016 年）

致谢

本论文是在王建祥老师和徐吉峰老师的悉心指导下完成的。感谢王老师这六年来对我学术上的指导和帮助，王老师敏锐的学术洞察力及独立的学术思想为我的科研道路打下了坚实的基础。感谢中国商用飞机北京民用飞机研究中心的徐吉峰老师带我走上研究近场动力学的科研道路，让我的科研经历有一个良好的开始。感谢麻省理工学院的 Rohan Abeyaratne 教授，在 MIT 交流期间，Rohan Abeyaratne 教授严谨踏实的学术作风，及为人谦和的行事风格使我受益良多。感谢英国卡迪夫大学的 Bhushan L Karihaloo 教授对我的指导和帮助。

感谢北京大学工学院的唐少强老师对本文人工边界条件工作的帮助，以及对我数学和编程上的指导。感谢励争老师对本文人工边界条件工作的建议。感谢王敏中老师和黄克服老师对本文格林函数工作的指导和帮助。感谢刘凯欣老师、苏先樾老师、励争老师、唐少强老师、李法新老师、裴永茂老师、曹国鑫老师在专业知识上对我的培养和帮助。特别感谢段慧玲老师及其他北京大学工学院力学与工程科学系固体力学学科点的老师们的指点和帮助。另外，感谢中国商用飞机北京民用飞机研究中心的陆孜孜博士和陈勇帅博士对我科研上的帮助和指导。感谢国家自然科学基金（编号：11521202 和 11231001）和国家留学基金委的资助。

感谢课题组内在学术和生活上给予我帮助的师兄和师姐：张凯、李紫光、杜锋、孙涛、吕鹏宇、薛亚辉、宋定坤、董海、王岩、李维娜和李丹丹等。同时，还感谢同学肖厦子、周士栋和刘浩，以及师妹和师弟：李姝、孙卉、毛奕霖、李锡英、余龙、陈李嵘、相耀磊、袁天宇、刘海林和梁学等，与他们在课题组共同学习和生活的时光充满了欢乐。

感谢家人及朋友们对我默默的支持和不断的鼓励，你们是我前进路上最大的动力！

北京大学学位论文原创性声明和使用授权说明

原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品或成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律结果由本人承担。

论文作者签名：王林娟 日期：2018年6月6日

学位论文使用授权说明

(必须装订在提交学校图书馆的印刷本)

本人完全了解北京大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，即：

- 按照学校要求提交学位论文的印刷本和电子版本；
- 学校有权保留学位论文的印刷本和电子版，并提供目录检索与阅览服务，在校园网上提供服务；
- 学校可以采用影印、缩印、数字化或其它复制手段保存论文；
- 因某种特殊原因需要延迟发布学位论文电子版，授权学校一年/两年/三年以后，在校园网上全文发布。

(保密论文在解密后遵守此规定)

论文作者签名：王林娟 导师签名：王建祥

日期：2018年6月6日

徐吉峰

